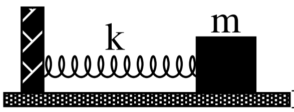
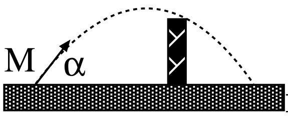
Esercizi di dinamica

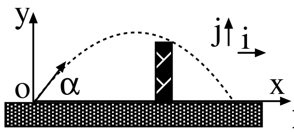
Esercitazioni di Fisica LA per ingegneri - A.A. 2003-2004



F1 ,



F2 ,



F3

Esercizio 1

Una massa di $m = 1.8\,Kg$ (vedi figura **F1**), attaccata ad una molla di costante elastica $k = 75\,N/m$ è spostata dalla posizione di equilibrio di $\Delta l = 0.35\,m$ e lasciata libera con velocità iniziale nulla. Calcolare:

1) la massima velocità v_M raggiunta dalla massa nel suo moto;
2) la frequenza di oscillazione ν;
3) il tempo Δt necessario a percorrere il primo tratto di $\Delta s = 0.25\,m$.

Soluzione

Il problema è unidimensionale quindi scriviamo l'equazione del moto nell'unica direzione interessante, ovvero quella dell'allungamento della molla. Se scelgo un sistema di riferimento la cui origine è collocata in corrispondenza alla posizione di riposo della molla allora posso scrivere:

$$F = m\,a \Rightarrow -kx = m\ddot{x}$$

che ha come soluzione generale l'espressione:

$$x(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$$

essendo $\omega = \sqrt{k/m}$ ed A e B le due solite costanti di integrazione legate alla risoluzione di un'equazione differenziale del secondo ordine. In generale queste costanti vengono fissate dalle condizioni iniziali al problema. In effetti a $t = 0\,s$ vale

$$x(0) = A\cos\omega\cdot 0 = A$$

e

$$\dot{x}(0) = \omega B\cos\omega\cdot 0 = \omega B.$$

Al variare di A e B l'espressione trovata per $x(t)$ descrive tutti i possibili moti di un corpo di massa m soggetta ad una forza elastica di costante elastica pari a k.
Quindi A è legato posizione e B alla velocità all'istante $t = 0$. Nel caso in questione

$$\dot{x}(t) = 0 \Rightarrow B = 0$$

e $x(0) = A = \Delta l$. Noti A e B sappiamo tutto del sistema

$$x(t) = \Delta l \cos \omega t.$$

La massima velocità di m la calcoliamo notando che $\dot{x}(t) = -\omega \Delta l \sin \omega t$ che è massima quando il seno è massimo ovvero $v_M = \omega \Delta l$. La frequenza si calcola dalla definizione di $\omega = 2\pi/T$ da cui

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}.$$

Infine, per calcolare Δt esprimiamo t in funzione di x:

$$t = \frac{1}{\omega} \arccos \frac{x}{\Delta l}$$

e notiamo che, quando il corpo si è spostato di Δs dalla posizione iniziale si trova nella posizione $x = \Delta l - \Delta s$, che sostituiamo nella relazione precedente per ottenere

$$\Delta t = \frac{1}{\omega} \arccos \frac{\Delta l - \Delta s}{\Delta l}.$$

(R: $v_M 2.26\, m/s$, $\nu = 1.03\, Hz$, $\Delta t = 0.199\, s$)

Esercizio 2

Un oggetto di massa $M = 0.4\, kg$ (figura **F2**) deve essere lanciato al di là di un muro distante $d = 25\, m$ ed alto $h = 15\, m$. Trascurando la resistenza dell'aria calcolare la minima velocità a cui deve essere lanciato l'oggetto se l'angolo di lancio è $\alpha = 60°$.

Soluzione

Il proiettile, immerso nel campo gravitazionale terrestre, in prima approssimazione è soggetta alla sola forza peso. Se scelgo il sistema di riferimento con $\hat{\imath}$ parallelo a terra e $\hat{\jmath}$ perpendicolare a terra e diretto verso l'alto, con origine nel punto di lancio del proiettile (vedo figura **F3**) le proiezioni della $\vec{F} = m\vec{a}$ lungo $\hat{\imath}$ ed $\hat{\jmath}$ sono:

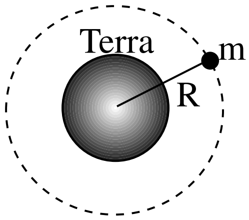
$$-Mg = M\ddot{y}(t)$$
$$0 = M\ddot{x}(t)$$

La seconda equazione differenziale esprime la condizione di moto senza accelerazione (moto uniforme lungo x) ed ha la ben nota soluzione

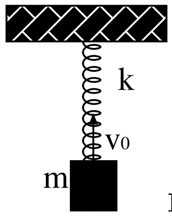
$$x(t) = \dot{x}(0)t + x(0) = (|\vec{v}_0| \cos \alpha)\, t$$

essendo $x(0) = 0$ (il proiettile parte dall'origine). La prima equazione, invece, esprime la condizione di moto uniformemente accelerato ed ha soluzione:

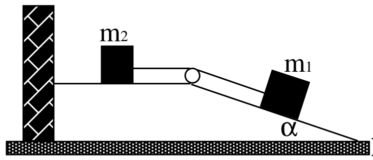
$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + (|\vec{v}_0| \sin \alpha)t$$



F4 ,



F5 ,



F6

in cui ho già imposto le condizioni iniziali. Dalle due soluzioni che esprimono la legge oraria parametrica in forma cartesiana posso calcolare l'equazione della traiettoria. Ricavo t dall'equazione per x e sostituisco in y per ottenere:

$$y = -\frac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + \tan \alpha x$$

che è l'equazione della parabola! Un proiettile in un campo uniforme, trascurando tutti gli attriti, ha una traiettoria parabolica. Vogliamo, a questo punto calcolare $v_0 = |\vec{v}_0|$ minimo in modo che il corpo passi il muro: se è minimo il corpo passerà rasente il muro ovvero ad un certo istante la sua traiettoria conterrà il punto $x = d$ $y = h$. Perciò v_0 si calcola risolvendo l'equazione

$$h = -\frac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha} d^2 + \tan \alpha d$$

nella variabile v_0:

$$v_0 = \sqrt{\frac{gd^2}{2d \sin \alpha \cos \alpha - 2h \cos^2 \alpha}}$$

(R: $20.8\, m/s$)

Esercizio 3

Un satellite artificiale di massa $m = 5 \cdot 10^4\, kg$ (figura **F4**) è in orbita circolare attorno alla Terra ad una distanza dal suo centro pari a $R = 8 \cdot 10^3\, km$. Calcolare la velocità v del satellite sapendo che la massa della terra è approssimativamente uguale ad $M \sim 5.97 \cdot 10^{24}\, kg$.

Soluzione

Per una questione di simmetria, l'unico moto circolare che può avere il satellite è un moto circolare uniforme. In tale moto la l'unica accelerazione che si misura è quella normale in modulo pari a $a_n = v^2/R$. Questo è consistente con il fatto che l'unica forza in gioco è quella gravitazionale che agisce in modo normale alla circonferenza. Tale forza vale, in modulo

$$F = \gamma \frac{mM}{R^2}$$

perciò a $\vec{F} = m\vec{a}$ lungo la normale si scrive come:

$$\gamma \frac{mM}{R^2} = m \frac{v^2}{R}$$

che è un'equazione nell'incognita v che risolta darà il risultato cercato:

$$v = \sqrt{\frac{\gamma M}{R}}$$

(R: $v = 1.417 \cdot 10^{-4} m/s$)

Esercizio 4

Una molla di costante elastica $k = 10\,N/m$ (figura **F5**) è appesa verticalmente e sostiene una massa $M = 0.5\,kg$. Il sistema è in equilibrio. Ad un certo istante viene impartita una velocità $v_0 = 1.1\,m/s$ verso l'alto. Determinare:

1) la funzione $z = z(t)$ che descrive il moto della massa essendo $z(0) = 0\,m$;

2) il periodo di oscillazione.

Soluzione

Inizialmente il sistema è in equilibrio. La molla è quindi allungata rispetto alla sua posizione di riposo di $\Delta l = Mg/k$ che si ottiene impostando l'equazione della statica $k\Delta l - Mg = 0$. Se in tale punto colloco l'origine del mio sistema di riferimento unidimensionale per analizzare il moto (puntato verso l'alto z), la $F = Ma$ si scrive come:

$$-Mg - k(z - \Delta l) = M\ddot{z}$$

in cui la forza a lato sinistro è composta dalla forza peso verso il basso $-Mg$ e dalla forza elastica $-k(z - \Delta l)$ che é diretta verso il basso solo quando $z > \Delta l$ (ovvero, giustamente, solo quando la molla è accorciata). Notando che $-Mg - k(z - \Delta l) = -kz$ ottengo la solita $-kz = M\ddot{z}$ già vista nell'esercizio 1. Una volta fissate le condizioni iniziali ottengo:

$$z(t) = v_0 \sqrt{\frac{M}{k}} \cos \sqrt{k/M}t$$

che descrive un moto armonico con periodo

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{M}{k}}.$$

(R: $z(t) = v_0 \sqrt{M/k} \cos(\sqrt{k/M}t)$, $T = 2\pi\sqrt{M/k}$)

Esercizio 5

Due pianeti di massa uguale orbitano attorno ad una stella di massa molto più grande. Il pianeta m_1 si muove su di un'orbita circolare di raggio $r_1 = 10^8\,km$ ed ha un periodo $T_1 = 2anni$. Il pianeta m_2 si muove su un'orbita ellittica con una distanza di massimo avvicinamento pari a $r_{min} = 1.2 \cdot 10^8\,km$ ed una di massimo allontanamento pari a $r_{max} = 1.8 \cdot 10^8\,km$. Calcolare:

1) la massa M della stella centrale;

2) il periodo T_2 di m_2.

Soluzione

Il pianeta m_1 si muove su un'orbita circolare quindi vale il ragionamento fatto per l'esercizio 3:

$$m_1\omega_1^2 r_1 = \gamma\frac{m_1 M}{r_1^2}$$

essendo ω_1 la sua velocità angolare costante che si può scrivere in funzione del periodo T_1:

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$$

Perciò si ottiene $M = (2\pi/T_1)^2 r_1^3/\gamma$. Per quello che riguarda il secondo pianeta bisogna utilizzare la terza legge di Keplero (i quadrati dei periodi di rivoluzione dei pianeti sono proporzionali ai cubi dei semiassi maggiori delle orbite):

$$\frac{T_1^2}{r_1^3} = \frac{t_2^2}{r_2^3}.$$

Per quello che riguarda l'orbita circolare il semiasse coincide con il raggio r_1 mentre per l'orbita ellittica vale $r_2 = (r_{max} + r_{min})/2$. Sostiutuendo nell'equazione di Keplero si ricava:

$$T_2 = \frac{(r_{min} + r_{max})^{3/2}}{(2r_1)^{3/2}} T_1$$

(R: $M = (2\pi/T_1)^2\, r_1^3/\gamma$, $T_2 = (r_{min} + r_{max})^{3/2}/(2r_1)^{3/2} T_1$)

Esercizio 6

Due corpi (figura **F6**) sono uniti da un cavo inestensibile e di massa trascurabile. Il corpo $m_1 = 5\,kg$ giace su di un piano inclinato di $\alpha = 45°$ rispetto a terra, il corpo $m_2 = 2\,kg$ giace su un piano orizzontale che inizia al termine del piano inclinato (e non è il piano di terra). Calcolare il tempo necessario ΔT perchè il sistema si sposti di $d = 5\,m$, immaginando che la configuarzione sia tale che le forze in gioca non cambino durante questo spostamento e che il sistema sia in quiete a $t = 0$.

Soluzione

Innazitutto si noti che dinamicamente il problema è equivalente ad un problema unidimensionale in cui m_1 ed m_2 sono appoggiati ad un piano orizzontale, uniti dal solito filo, ed in cui m_1 è soggetto ad una forza uguale alla componente della forza peso di m_1 lungo il piano inclinato nel problema originale. Dunque tale forza, costante, agisce sul sistema che, a causa del filo, ha un inerzia (espressa dalla massa) data dalla somma delle inerzie di m_1 ed m_2. Ragionando in unidimensionalmente:

$$m_1 g \sin\alpha = (m_1 + m_2)\ddot{x}(t)$$

che descrive un moto accelerato con

$$a_0 = \frac{m_1 g \sin\alpha}{m_1 + m_2}.$$

Quindi

$$x(t) = \frac{1}{2} a_0 t^2$$

essendo, per ipotesi, $dotx(0) = 0$ e $x(0) = 0$ (basta scegliere un opportuno sistema di riferimento). All'istante $t = \Delta T$ il sistema si è spostato nel punto $x(\Delta T) = d$:

$$d = \frac{1}{2} a_0 (\Delta T)^2$$

che esprime l'equazione nell'incognita ΔT da risolvere per ottenere:

$$\Delta T = \sqrt{\frac{2d}{a_0}}.$$

(R: $\Delta T = 1.004\, s$)

Esercizi d'esame

Esercizio 1

Calcolare il periodo T di rivoluzione attorno alla Terra di un satellite artificiale che si muove su di un'orbita circolare a una quota (rispetto alla superficie terrestre) pari a metà della quota dell'orbita geostazionaria (orbita sulla quale un satellite si trova in quiete rispetto alla superficie terrestre).

Soluzione

Sull'orbita geostazionaria il satellite per definizione impiegherebbe 1 giorno per compiere una rivoluzione completa. Quindi la sua velocità angolare sarebbe $\omega_{GS} = 2\pi/T_D$ con $T_D = 1\,\text{giorno}$. Eguaglio, al solito accelerazione centripeta alla forza di attrazione per ottenere:

$$m\omega_{GS}^2 R_{GS} = \gamma \frac{mM}{R_{GS}^2}$$

da cui

$$R_{GS}^3 = \frac{\gamma M}{\omega_{GS}^2}$$

in cui R_{GS} è il raggio dell'orbita geostazionaria ed M è la massa della terra. Il nostro satellite si trova ad $R = R_{GS}/2$. Eguaglio ancora accelerazione centripeta e forza di attrazione gravitazionale sull'orbita di raggio R:

$$m\omega^2 R = \gamma \frac{mM}{R^2}$$

in cui ω è da calcolare risolvendo appunto questa equazione (R è noto!). Dalla definizione di $\omega = 2\pi/T$ si calcola facilmente

$$T = 1/\sqrt{8} \text{ giorni}.$$

(*Totale 28/03/2003*; R: $1/\sqrt{8}$ giorni)