

Esercizi Campi Conservativi - Lavoro - Urti

Esercitazioni di Fisica LA per ingegneri - A.A. 2004-2005

Esercizi Campi Conservativi - Lavoro

Esercizio 9

Un disco ed un anello rotolano senza strisciare lungo un piano inclinato. Determinare il rapporto fra le rispettive quote di partenza affinché giungano alla fine del piano con la stessa velocità. (R: $h_D/h_A = 3/4$)

Soluzione

Incominciamo con il disco che ha momento di inerzia pari a

$$I = \frac{MR^2}{2}$$

rispetto ad un asse di rotazione ad esso ortogonale e passante per il suo centro di massa. All'istante iniziale esso è fermo quindi ha un'energia cinetica nulla. Tuttavia, a causa del fatto che il suo centro di massa si trova ad una distanza h_0 da terra ed è immerso nel campo gravitazionale terrestre, esso ha una energia potenziale pari a

$$V_0 = Mgh_0.$$

Quando arriva a terra il disco ha un'energia cinetica che per il teorema di König si può esprimere come la somma dell'energia cinetica traslazionale del suo centro di massa e dell'energia cinetica rotazionale rispetto al centro di massa stesso:

$$T = \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

in cui $R\omega = v_{CM}$ visto che il disco rotola senza strisciare.

La sua energia potenziale è $V = MgR$ perchè misurata rispetto alla quota del centro di massa (in sostanza il dislivello totale è $\Delta h \equiv h_0 - R$ che è la distanza da terra del punto più basso del disco all'istante iniziale). Quindi eguagliando l'energia meccanica totale del disco alla quota Δh_D ed alla quota 0 m si ottiene:

$$\frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = Mg\Delta h_D \Rightarrow \frac{3}{4}Mv^2 = Mg\Delta h_D$$

da cui si riesce ad esprimere la velocità al suolo in funzione del dislivello percorso

$$v^2 = \frac{4}{3}g\Delta h_D$$

che quindi dipende solo dal dislivello e dalla forma con cui si esprime momento di inerzia del disco. Le stesse considerazioni appena viste si possono ripetere per l'anello che tuttavia ha un momento di inerzia differente e pari a

$$I = MR^2$$

quindi la conservazione dell'energia conduce a

$$Mv^2 = Mg\Delta h_A \Rightarrow v^2 = g\Delta h_A.$$

Se le due velocità calcolate sopra devono essere uguali allora

$$\frac{\Delta h_D}{\Delta h_A} = \frac{3}{4}.$$

Esercizio 10

Una pallina di massa $m = 30 \text{ g}$ è lanciata verso l'alto con velocità iniziale $v_0 = 15 \text{ m/s}$. Sapendo che raggiunge quota $h = 7.5 \text{ m}$ calcolare l'energia dissipata per effetto dell'attrito dell'aria. Modellando l'attrito con una forza resistenza di modulo costante, determinarne il modulo F_A . (R: $\Delta E = -1.17 \text{ J}$, $F_A = 0.156 \text{ N}$)

Soluzione

L'energia dissipata può essere calcolata facendo un confronto fra l'energia meccanica totale iniziale della pallina e quella alla quota h . La pallina è immersa nel campo di forza gravitazionale (conservativo) quindi la sua energia totale si può esprimere come la somma della sua energia cinetica e quella potenziale gravitazionale. All'istante iniziale la pallina è a terra. Fissando a zero l'energia potenziale a terra allora l'energia meccanica iniziale della particella è data dalla sola sua energia cinetica:

$$E_i = \frac{1}{2}mv_0^2.$$

Alla quota h la particella arriva con una velocità nulla (perchè è la quota massima), quindi a quell'istante la sua energia meccanica è data dalla sola energia potenziale:

$$E_f = mgh < E_i$$

quindi l'energia persa durante l'ascesa è (in modulo)

$$\Delta E = E_i - E_f > 0.$$

Supponendo che la dissipazione sia dovuta ad una forza costante di attrito allora, per il teorema della forze vive, possiamo scrivere che la variazione di energia cinetica della particella durante la sua ascesa è data dal lavoro delle forze agenti su di essa durante il moto. Le due forze che agiscono sulla pallina sono la forza peso \vec{P} e la forza di attrito \vec{F}_A ; entrambe hanno modulo costante e sono dirette in verso opposto rispetto alla velocità della palla (entrambe hanno un effetto frenante durante l'ascesa). Il loro lavoro, quindi, è dato da

$$L = \int_0^h d\vec{s} \cdot (\vec{P} + \vec{F}_A) = - \int_0^h ds(mg + F_A) = -h(mg + F_A)$$

essendo F_A il modulo della forza di attrito (si noti ancora che il segno meno compare a causa del fatto che $d\vec{s}$ e le due forze hanno versi opposti).

La variazione di energia cinetica è:

$$\Delta T = T_f - T_i = -\frac{1}{2}mv_0^2$$

quindi uguagliando le due quantità sopra calcolate (teorema delle forze vive) si ottiene:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh + F_A h \Rightarrow F_A h = \frac{1}{2}mv^2 - mgh = E_i - E_f \Rightarrow F_A = \frac{E_i - E_f}{h} > 0$$

ovvero, in altre parole, il lavoro della forza di attrito è uguale alla variazione dell'energia meccanica totale. Tale forza, in modulo, vale

$$F_A = 0.156 N.$$

Esercizio 14

Si consideri un piano orizzontale sollevato rispetto al suolo unito con continuità ad un piano inclinato di $\alpha = 30^\circ$ rispetto a terra (si immagini che i due piani con la verticale ed il suolo formino un trapezio rettangolo con la base maggiore appoggiata a terra). Sul piano orizzontale è appoggiata una massa $m_1 = m$ mentre su quello inclinato stà una massa $m_2 = 2m_1$. Le due masse sono unite da un cavo inestensibile e di massa trascurabile che si appoggia ad una carrucola nel vertice di contatto dei due piani che stiamo considerando. La carrucola ha massa pari a $M = 2m$ ed è libera di ruotare intorno al suo centro di massa. Se il cavo rotola senza strisciare sulla carrucola, trascurando tutti gli attriti di contatto fra i piani m_1 ed m_2 determinare il modulo dell'accelerazione del sistema. (R: $a = g/2$)

Soluzione

Si noti anzitutto che il movimento dell'intero sistema ($m_1 + m_2 + \text{carrucola}$) può essere descritto da un unico parametro. Infatti le due masse sono unite da un cavo inestensibile quindi ad uno spostamento di m_2 (che scende verso terra nella direzione del piano inclinato) corrisponde uno spostamento (uguale in modulo) di m_1 in senso orizzontale. Il modulo delle velocità di m_1 ed m_2 sarà sempre uguale. Visto inoltre che il cavo non striscia sulla carrucola allora ad ogni spostamento Δl delle due masse corrisponde una rotazione della carrucola pari a $\Delta\theta = \Delta l/R$ in cui R è il raggio della carrucola stessa. La velocità di rotazione della carrucola sarà dunque:

$$\omega = \frac{d}{dt} \Delta\theta = \frac{1}{R} \frac{d}{dt} \Delta l \equiv \frac{v}{R}$$

in cui v è il modulo della velocità delle due masse.

Visto che non sono presenti forze che dissipano l'energia totale del sistema, allora la sua energia meccanica totale si conserva. All'istante iniziale essa è data dalle sole energie potenziale delle tre masse immerse nel campo gravitazionale terrestre (visto che tutto è fermo)

$$E_0 = V_{01} + V_{02} + V_{03}.$$

Ad un generico istante successivo, invece

$$E_0 = T_1(t) + V_1(t) + T_2(t) + V_2(t) + T_3(t) + V_3(t)$$

ma visto che le energie potenziali dipendono solo dalla quota delle masse nel campo gravitazionale vale

$$V_{01} = V_1(t), \quad V_{03} = V_3(t)$$

e sottraendo le due espressioni sopra si ha:

$$0 = T_1(t) + T_2(t) + V_2(t) - V_{02} + T_3(t)$$

in cui

$$T_i(t) = \frac{1}{2} m_i v^2(t)$$

e l'energia cinetica della carrucola (a forma di disco che ruota intorno ad un asse passante per il suo centro di massa) è

$$T_3(t) \frac{1}{2} I \omega(t)^2 = \frac{MR^2 \omega^2(t)}{4} = \frac{1}{4} M v^2(t).$$

La differenza di potenziale a causa del fatto che m_2 stia scendendo di quota muovendosi sul piano inclinato è

$$V_2(t) - V_{02} = m_2 g (h(t) - h_0) = -m_2 g \Delta l \sin \alpha$$

essendo $h(t) - h_0 < 0$ e $\Delta l > 0$. Quindi sostituendo si ottiene

$$\frac{1}{2} \left(m_1 + m_2 + \frac{M}{2} \right) v^2 - m_2 g \Delta l \sin \alpha = 0$$

che esprime come varia la velocità del sistema in funzione della distanza percorsa dalle masse:

$$v = \sqrt{\frac{m_2 g \Delta l \sin \alpha}{\frac{1}{2} \left(m_1 + m_2 + \frac{M}{2} \right)}};$$

se invece essa viene derivata allora si ottiene

$$\left(m_1 + m_2 + \frac{M}{2} \right) v \cdot a = m_2 g v \sin \alpha$$

da cui si esplicita l'accelerazione (semplificato v) che, sostituendo i valori delle masse vale

$$a = \frac{m_2 g \sin \alpha}{\left(m_1 + m_2 + \frac{M}{2} \right)} = \frac{g}{2}.$$

Esercizio 7

Un campo di forze unidimensionale ha un'energia potenziale descritta dalla funzione $V(x) = V_0 e^{kx}$ con $k = 1 \text{ m}^{-1}$ e $V_0 = 1 \text{ J}$ per $x < 0 \text{ m}$, e dalla funzione $V(x) = 1 \text{ J}$ per $x \geq 0 \text{ m}$. In questo campo di forze sono immerse due particelle di masse rispettivamente $m_1 = 4 \text{ kg}$ ed $m_2 = [(\xi + 1)/1000] m_1$. La particella m_1 è collocata ad $x_1 = -\infty \text{ m}$ con velocità $v_0 = \sqrt{\xi + 1} \text{ m/s}$, la particella m_2 è ferma in $x_2 = 10 \text{ m}$. Ad un certo istante le particelle collidono in modo totalmente anelastico. Calcolare la velocità v_f del sistema dopo l'urto. (Parziale 02/03/2004; R: $v_f = 1000 \sqrt{\xi + 1/2} / (1001 + \xi) \text{ m/s}$)

Soluzione

La particella m_1 ha inizialmente energia totale pari a

$$E_1 = \frac{1}{2} m_1 (\xi + 1) \text{ J/kg}$$

visto che è posta a $x = -\infty m$ dove l'energia potenziale è nulla. Per arrivare nel semipiano delle ascisse positive, dove l'energia potenziale è V_0 (costante ovunque) deve essere $E_1 > V_0$. Quando ci arriva la sua energia meccanica totale sarà uguale a quella iniziale (l'energia si conserva) e sarà:

$$\frac{1}{2}m_1v_{1+}^2 + V_0 = E_1 \Rightarrow v_{1+} = \sqrt{\xi + \frac{1}{2}} m/s.$$

Con questa velocità dunque la particella 1 arriva sulla particella 2 e la urta istantaneamente in modo totalmente anelastico. Dopo l'urto quindi le due particelle viaggeranno verso $x = +\infty m$ unite fra di loro in un'unica particella di massa $m_1 + m_2$. Nell'urto si deve conservare la quantità di moto totale visto che l'urto è un processo di durata impulsiva quindi troppo breve per poter risentire del campo esterno in cui è immerso il sistema (in questo caso inoltre detto campo esterno è nullo visto che siamo in una regione a potenziale costante! **Attenzione la stessa identica considerazione vale per le esplosioni: esse si devono trattare esattamente allo stesso modo degli urti anelastici; l'unica differenza è l'inversione della linea temporale del processo: inizialmente si ha una particella che poi, terminato il processo, è divisa in due o più pezzi**). Dalla conservazione della quantità di moto:

$$m_1v_{1+} + m_2v_2 = (m_1 + m_2)v_f$$

in cui $v_2 = 0 m/s$. Banalmente quindi si ottiene il risultato finale

$$v_f = \frac{m_1v_{1+}}{m_1 + m_2}$$

che è pure la velocità con cui il sistema viaggia fino ad $x = +\infty m$.

Esercizio 9

Un campo di forze unidimensionale ha un'energia potenziale nulla ovunque tranne che nell'intervallo $-\sqrt{b/a} < x < \sqrt{b/a}$ in cui è descritta dalla funzione $V(x) = -ax^2 + b$ con $a = 1 J m^{-2}$ e $b = (\xi/100 + 1) J$. In questo campo di forze sono immerse due particelle di masse rispettivamente $m_1 = 1 kg$ ed $m_2 = 2 m_1$. La particella m_1 è collocata ad $x_1 = -2\sqrt{b/a}$ con velocità $v_1 = 2\sqrt{b/m_1}$, la particella m_2 è ferma in $x_2 = 0 m$. Ad un certo istante le particelle collidono in modo totalmente anelastico. Calcolare la velocità del sistema immediatamente dopo l'urto (v_i) e nell'istante in cui esso transita per il punto $x = 2\sqrt{b/a}$ (v_f). (Totale 02/04/2004; R: $v_i = \sqrt{2(\xi/100 + 1)}/9 m/s$, $v_f = \sqrt{8(\xi/100 + 1)}/9 m/s$)

Soluzione

Inizialmente la particella 1 è collocata in un punto di energia potenziale nulla quindi la sua energia meccanica totale è data dalla sola sua energia cinetica

$$E_1 = T_{1i} = \frac{1}{2}m_1v_1^2;$$

quando arriva in cima alla collina di potenziale essa, invece avrà anche un'energia potenziale data da $V(0) = b$ quindi la sua energia meccanica totale (che è conservata nel suo tragitto da x_1 a $x = 0 m$) si scrive come

$$E_1 = T_1 + b = T_{1i} \Rightarrow T_1 = b$$

perciò la velocità della particella 1 subito prima dell'urto vale

$$v_{10} = \sqrt{\frac{2b}{m_1}};$$

con tale velocità urta dunque m_2 che è ferma nell'origine. La quantità di moto si conserva in seguito all'urto (che è totalmente anelastico) quindi

$$m_1 v_{10} = (m_1 + m_2) v_i \Rightarrow v_i = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_{10};$$

con velocità v_i , dunque, la particella di massa $m_1 + m_2$ formata dall'urto incomincia a muoversi dal punto $x = 0$ m. Essa dunque è "originata" con un'energia meccanica totale data dalla sua energia cinetica più l'energia potenziale dovuta alla sua posizione:

$$E_f = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_i^2 + V(0) = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_i^2 + b.$$

Tale energia totale si conserverà durante tutto il suo moto (visto che non incontrerà sulla sua strada altre particelle da urtare) quindi giunta nel punto $x = 2\sqrt{b/a}$ dove l'energia potenziale è nulla essa avrà un'energia cinetica pari a T_f tale che

$$E_f = T_f = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_f^2 \Rightarrow v_f = \sqrt{\frac{2E_f}{m_1 + m_2}}$$