

# Esercizi Campi Conservativi - Lavoro - Urti

Esercitazioni di Fisica LA per ingegneri - A.A. 2004-2005

## Esercizi Campi Conservativi - Lavoro

### Esercizio 1

Un uomo sta spingendo un masso ( $M = 100 \text{ kg}$ ) con velocità costante ( $v_0 = 0.2 \text{ m/s}$ ) su un piano orizzontale in presenza di attrito dinamico ( $\lambda = 1$ ). Calcolare il lavoro che deve fare per spostarlo per  $\Delta t = 10 \text{ s}$ .

### Esercizio 2

Un uomo cala dalla finestra di casa un peso  $m = 20 \text{ kg}$  tramite una corda inestensibile e di massa trascurabile. Sapendo che il corpo scende con la legge oraria  $y(t) = y_0 - \frac{1}{2}a_0t^2$  con  $a_0 = 3 \text{ m/s}^2$  calcolare il lavoro dell'uomo se il masso viene calato per  $h = 5 \text{ m}$ .

### Esercizio 3

Due sferette di massa  $m = 1 \text{ kg}$  sono vincolate ad una sbarretta di massa  $M = 0.5 \text{ kg}$  ruotante con velocità angolare  $\omega_0 = 1 \text{ rad/s}$  e lunga  $L = 0.5 \text{ m}$ . Le sferette sono tenute da un cavo inestensibile e di massa trascurabile a distanza  $d_0 = 0.1 \text{ m}$  e sono disposte simmetricamente rispetto al centro di rotazione. Ad un certo istante il cavo viene tagliato e le sbarrette incominciano a muoversi. Calcolare con che velocità si muovono quando si liberano dal vincolo della sbarretta.

### Esercizio 4

Un bambino lancia una pallina di gomma ( $m = 0.01 \text{ kg}$ ) verticalmente verso terra dall'altezza di  $h_0 = 1 \text{ m}$ . Calcolare a quale velocità, al minimo, deve lanciarla affinché, nel caso di urto completamente elastico fra la terra e la pallina, la pallina risalendo, raggiunga la quota di  $h = 5 \text{ m}$ .

### Esercizio 5

Data l'energia potenziale di un campo di forza unidimensionale  $V(x) = cx^4 - dx^2$  con  $c = 1 \text{ J/m}^4$  e  $d = 4 \text{ J/m}^2$  calcolare il campo di forze in funzione di  $x$ . Se lancio una particella di massa  $m = 0.1 \text{ kg}$  con velocità  $v_0 = 1 \text{ m/s}$  dal punto  $x = 0$ , a quale distanza si riesce ad allontanare, al massimo dal punto di lancio?

### Esercizio 6

L'energia potenziale di un campo di forza unidimensionale è  $V(x) = \frac{x-1}{x+1}$  per  $x \geq 0$  e  $V(x) = -1$  per  $x < 0$ . Calcolare quale velocità, al minimo, deve avere una particella di massa  $m = 0.05 \text{ kg}$  lanciata verso destra da  $x_0 = -10 \text{ m}$  per allontanarsi all'infinito nella regione  $x \geq 0$ . Cosa succede se la velocità è minore? E se è maggiore?

### Esercizio 7

Dato il campo di forze  $F(x) = -12x^2 + 1$  determinare a quale velocità deve essere lanciata da  $x_0 = -1/2 m$  una particella di massa  $m = 0.0.1 kg$  per arrivare nel semipiano delle  $x$  positive.

### Esercizio 8

Un campo di forze conservative ha per energia potenziale la funzione  $U(x) = A/B - A(B^2 + x^2)^{1/2}$  con  $A$  e  $B$  costanti positive e  $-\infty < x < \infty$ . Calcolare:

- 1) le dimensioni delle costanti  $A$  e  $B$ ;
- 2) il punto di equilibrio (verificare che è stabile);
- 3) la minima velocità che deve possedere il corpo lanciato dal punto di equilibrio per raggiungere l'infinito.

(R:  $0 m, (2A/mB)^{1/2}$ )

### Esercizio 9

Un disco ed un anello rotolano senza strisciare lungo un piano inclinato. Determinare il rapporto fra le rispettive quote di partenza affinché giungano alla fine del piano con la stessa velocità. (R:  $h_D/h_A = 3/4$ )

### Esercizio 10

Una pallina di massa  $m = 30 g$  è lanciata verso l'alto con velocità iniziale  $v_0 = 15 m/s$ . Sapendo che raggiunge quota  $h = 7.5 m$  calcolare l'energia dissipata per effetto dell'attrito dell'aria. Modellando l'attrito con una forza resistenza di modulo costante, determinarne il modulo  $F_A$ . (R:  $\Delta E = -1.17 J, F_A = 0.156 N$ )

### Esercizio 11

Calcolare quale lavoro si compie per trascinare un oggetto di peso  $P = 40 N$  per una distanza  $l = 10 m$  con velocità costante sapendo che il coefficiente di attrito cinetico vale  $\mu = 0.2$ . (R:  $L = 80 J$ )

### Esercizio 12

Un sistema è costituito da due masse uguali  $m_1 = m$  ed  $m_2 = m$  che possono scorrere senza attrito su due guide tra di loro ortogonali (rispettivamente una parallela e una ortogonale a terra). Le due masse sono fissate ad una sbarra di lunghezza  $l$ , anch'essa di massa  $m$ . All'istante iniziale la sbarra forma un angolo  $\theta_0$  con la terra ed il sistema è fermo. Lasciato libero il sistema inizia a muoversi; determinare il modulo della velocità delle due masse quando l'asta raggiunge la verticale. (R:  $v_1 = 3/2\sqrt{gl(1 - \sin\theta_0)}, v_2 = 0 m/s$ )

### Esercizio 13

Un uomo ( $m = 70 \text{ kg}$ ) é in piedi al centro di una piattaforma circolare di massa  $M = 500 \text{ kg}$  e raggio  $R = 5 \text{ m}$  che ruota con velocità angolare  $\omega_0 = 0.5 \text{ rad/s}$ . Ad un certo istante l'uomo si allontana di  $d = 2 \text{ m}$  dal centro. Calcolare:

- 1) la velocità angolare della piattaforma dopo lo spostamento  $\omega_f$ ;
- 2) Il lavoro  $L$  che l'uomo dovrebbe fare per tornare al centro della piattaforma.

(R:  $\omega_f = 0.479 \text{ rad/s}$ ,  $L = 33.50 \text{ J}$ )

### Esercizio 14

Si consideri un piano orizzontale sollevato rispetto al suolo unito con continuità ad un piano inclinato di  $\alpha = 30^\circ$  rispetto a terra (si immagini che i due piani con la verticale ed il suolo formino un trapezio rettangolo con la base maggiore appoggiata a terra). Sul piano orizzontale è appoggiata una massa  $m_1 = m$  mentre su quello inclinato stà una massa  $m_2 = 2m_1$ . Le due masse sono unite da un cavo inestensibile e di massa trascurabile che si appoggia ad una carrucola nel vertice di contatto dei due piani che stiamo considerando. La carrucola ha massa pari a  $M = 2m$  ed è libera di ruotare intorno al suo centro di massa. Se il cavo rotola senza strisciare sulla carrucola, trascurando tutti gli attriti di contatto fra i piani  $m_1$  ed  $m_2$  determinare il modulo dell'accelerazione del sistema. (R:  $a = g/2$ )

### Esercizi d'esame: Campi Conservativi - Lavoro

#### Esercizio 1

Una particella di massa  $m = 0.1 \text{ kg}$ , fissata ad una molla di costante elastica  $k = 30 \text{ N/m}$ , lunghezza a riposo  $l = 0.5 \text{ m}$  e di massa trascurabile, viene lasciata cadere da una quota di  $h = 1 \text{ m}$  in modo che la molla preceda la particella nella discesa verso terra. Giunta a terra la molla si conficca istantaneamente e perpendicolarmente al suolo nel suo estremo libero. Calcolare la distanza minima da terra  $d$  raggiunta dalla particella. (Parziale a.a. 2002/2003 - R:  $d = 0.2837 \text{ m}$ )

#### Esercizio 2

Una sbarra orizzontale, sottile ed omogenea, di lunghezza  $L = 2\xi \cdot 10^{-3} \text{ m}$  e massa  $M = \xi \cdot 10^{-3} \text{ kg}$  é libera di ruotare, senza attrito, attorno ad un asse verticale, passante per il suo centro. Sulla sbarra sono infilate, dalle due parti opposte, due sferette di dimensioni trascurabili, ciascuna di massa  $m = \xi/4 \cdot 10^{-3} \text{ kg}$ . Inizialmente il sistema ruota con velocità angolare  $\omega_0 = \sqrt{\xi}/8 \text{ rad/s}$  e le sferette sono trattenute da un filo a distanza  $d = \xi/5 \cdot 10^{-3} \text{ m}$  dal centro della sbarra. Ad un certo istante il filo é tagliato cosí che le sferette sono libere di scorrere senza attrito lungo la sbarra. Calcolare le componenti normale (rispetto alla sbarra) della velocità delle sferette nell'istante in cui arrivano alle estremità della sbarra. Totale LA 01/07/2003

#### Esercizio 3

Un punto materiale soggetto alla forza posizionale  $\vec{F} = -cy\hat{i} + cx\hat{j} + cz\hat{k}$ , dove  $c = \xi/10 \text{ N/m}$ . Calcolare il lavoro compiuto dalla forza quando il punto materiale compie un giro completo sulla

circonferenza  $C$  di raggio  $r = \xi/100 \text{ m}$ , giacente sul piano  $xy$  con centro nell'origine:  $C\{P \in \mathcal{R}^3; x = r \cos \phi, y = r \sin \phi, z = 0, \phi \in [0, 2\pi[ \}$ . *Totale LA 19/06/2003*

#### Esercizio 4

Sia dato il campo di forza:  $\vec{F}(x, y, z) = 2\alpha(xy^2\hat{i} + x^2y\hat{j} + 2z^3\hat{k})$ , definito in  $\mathcal{R}^3$ . Verificare se esso è conservativo ed eventualmente determinarne il potenziale. *Totale 28/03/2003*

#### Esercizio 5

Un cilindro, di massa  $m$ , raggio  $r$  e momento di inerzia  $I = \xi/1000 \text{ m}r^2$ , inizialmente in quiete, rotola senza strisciare lungo un piano inclinato di  $30^\circ$ , con l'asse disposto parallelamente all'isopse, in assenza di attrito volvente. Calcolarne l'accelerazione. Calcolare inoltre la velocità acquistata dal cilindro dopo che esso è disceso di un dislivello  $h = 10 \text{ m}$  rispetto alla posizione iniziale. *Totale 19/09/2003*

#### Esercizio 6

Un punto materiale di massa  $2m$  si muove con velocità  $\vec{v} = 10\hat{i} \text{ m/s}$  avente direzione orizzontale e giacente su di un piano verticale. Il punto materiale urta elasticamente ed istantaneamente nel punto  $A$  una sbarra rigida omogenea di massa  $m$  e lunghezza  $a = 1 \text{ m}$ , incernierata allo stesso piano verticale nel punto  $O$ . La distanza  $OA$  pari ad  $a = \sqrt{\xi/1000}$ . Determinare la velocità del punto materiale e la velocità angolare della sbarra dopo l'urto. *Totale 19/09/2003*

#### Esercizio 7

Una particella di massa  $m = 0.5 \text{ kg}$ , fissata ad una molla di costante elastica  $k = 50 \text{ N/m}$ , lunghezza a riposo  $l = 0.1 \text{ m}$  e di massa trascurabile, viene lasciata cadere da una quota di  $h = 3 \text{ m}$  in modo che la molla preceda la particella nella discesa verso terra. Giunta a terra la molla si conficca al suolo nel suo estremo libero. Calcolare quanto tempo  $T$  trascorre dall'istante in cui viene lasciata cadere la particella al primo istante in cui essa raggiunge l'avvicinamento massimo dal suolo. *Parziale Feb. 2003(R:  $d = 0.2837 \text{ m}$ )*

## Esercizi Urti

### Esercizio 1

Due particelle di massa  $m_1 = m$  e  $m_2 = 2m$  ( $m = 0.1 \text{ kg}$ ) vincolate ad una retta si urtano. Sapendo che prima dell'urto la particella 1 si muove con velocità  $v_0 = 5 \text{ m/s}$  e la particella 2 è ferma, calcolare la velocità delle particelle dopo l'urto nel caso di urto elastico e nel caso che nell'urto venga dissipata un'energia pari a  $\Delta E = 0.01 \text{ J}$

### Esercizio 2

Due particelle rispettivamente di massa  $m_1 = 0.2 \text{ kg}$  e  $m_2 = 1 \text{ kg}$ , vincolate ad una rotaia rettilinea parallela a terra, si muovono all'istante  $t = 0$  con velocità rispettivamente di  $v_1 = 2 \text{ m/s}$  e  $v_2 = 1 \text{ m/s}$ . Ad un certo istante collidono; sapendo che la particella  $m_1$ , dopo l'urto ha una velocità pari a  $\bar{v}_1 = 1 \text{ m/s}$  calcolare la velocità di  $m_2$  dopo l'urto. Scrivere, inoltre, l'equazione del moto del centro di massa del sistema.

### Esercizio 3

Due punti materiali di massa rispettivamente  $m_1 = 0.1 \text{ kg}$  e  $m_2 = 0.3 \text{ kg}$  a  $t = 0 \text{ s}$  distano  $d_0 = 5 \text{ m}$ . Dopo  $\Delta t = 10 \text{ s}$  collidono. L'urto è tale che le due masse si uniscono formando un'unica particella che si muove con velocità  $v_f = 2 \text{ m/s}$ . Quali sono le velocità iniziali dei due punti materiali?

### Esercizio 4

Una particella puntiforme di massa  $m_1 = 0.15 \text{ kg}$  che si muove con velocità  $u = 7.2 \text{ m/s}$  su un piano orizzontale liscio, urta un'altra particella inizialmente in quiete. Dopo l'urto i due corpi si muovono sul piano; la particella  $m_1$  con modulo della velocità  $v_1 = 4.5 \text{ m/s}$  ed angolo  $\theta_1 = 60^\circ$  rispetto alla linea iniziale di volo, la seconda particella con modulo della velocità  $v_2 = 1 \text{ m/s}$ . Calcolare:

- 1) l'angolo di diffusione del corpo urtato e la sua massa;
- 2) la variazione di energia cinetica tra stato iniziale e stato finale.

### Esercizio 5

Un sistema composto da due sfere, entrambe di massa  $M = 0.1 \text{ kg}$  collegate tra loro da una molla con costante elastica  $k = 2 \text{ N/m}$  e lunghezza  $L = 0.5 \text{ m}$ , è inizialmente in quiete. Una delle due sfere è urtata centralmente ed elasticamente da una terza sfera anch'essa di massa  $M$  che si muove con velocità  $v = 1.8 \text{ m/s}$  lungo la retta congiungente i centri delle due sfere. Calcolare:

- 1) la velocità del centro di massa del sistema delle due sfere dopo l'urto;
- 2) il periodo di oscillazione;
- 3) le distanze minima e massima fra e due sfere.

## Esercizio 6

Un campo di forze conservativo unidimensionale è descritto dalla seguente energia potenziale:

$$\begin{aligned} U(x) &= 0.5 \cdot k \cdot x^2 & \text{per} & \quad |x| \leq A \\ U(x) &= 0.5 \cdot k \cdot A^2 & \text{per} & \quad |x| > A \end{aligned}$$

con  $k = 6 \text{ N/m}$  e  $A = 0.65 \text{ m}$ . Nel punto  $x = 0$  si trova, in quiete, una particella puntiforme di massa  $m_2 = 0.2 \text{ kg}$ . Un'altra particella puntiforme di massa  $m_1 = 0.1 \text{ kg}$ , inizialmente in moto a grande distanza dall'origine, con velocità  $v_0 = 3.5 \text{ m/s}$ , entra nella regione in cui il campo di forze è attivo e collide con la particella ferma in  $x = 0$ . Calcolare, nell'ipotesi di urto elastico di durata trascurabile:

- 1) le velocità delle due particelle subito dopo la collisione;
- 2) l'intervallo di tempo che trascorre dall'urto al momento in cui  $m_2$  raggiunge il punto  $x = 1.5 \text{ m}$ .

(R:  $-2.04 \text{ m/s}$ ,  $4.09 \text{ m/s}$ ,  $0.62 \text{ s}$ )

## Esercizi d'esame: Urto

### Esercizio 1

Sia dato un campo di forze unidimensionale la cui energia potenziale è della forma  $V(x) = kx \exp(-\alpha x^2)$  con  $k = 1 \text{ J/m}$  ed  $\alpha = 2 \text{ m}^{-2}$ . Calcolarne i punti di equilibrio e dire se sono stabili o instabili. Ad un certo istante una coppia di particelle puntiformi di massa  $m = 2\xi \cdot 10^{-5} \text{ kg}$  vengono immerse in questo campo di forze. La prima è posta ad  $x = -\infty \text{ m}$  con una velocità  $v_0$  diretta verso le  $x$  crescenti, la seconda in quiete nel punto di equilibrio stabile del campo. Sapendo che, ad un certo istante, le due particelle si urtano in modo istantaneo e perfettamente anelastico calcolare quanto deve valere, al minimo,  $v_0$  affinché, dopo l'urto, le particelle riescano ad arrivare ad  $x = +\infty \text{ m}$ . (Trovare una condizione tipo  $v_0 > v_m$ ) *Totale 15/12/2003*

### Esercizio 2

Un campo di forze conservativo unidimensionale ha un'energia potenziale uguale a  $V(x) = Ax^2$  con  $A = 8 \text{ J/m}^2$ . In questo campo di forze vengono immerse due particelle di massa  $m_1 = 0.1 \text{ kg}$  e  $m_2 = 0.2 \text{ kg}$  rispettivamente nei punti  $x_1 = 5 \text{ m}$  e  $x_2 = 0 \text{ m}$ . Sapendo che inizialmente le particelle sono a riposo, ed immaginando che ad un certo istante si urtino in modo totalmente elastico, calcolare la massima distanza che riesce a raggiungere  $m_2$  dall'origine prima di un secondo, eventuale urto con  $m_1$ .

### Esercizio 3

Il potenziale di un campo di forze unidimensionale è  $V(x) = Ax^4 - Bx^2$  per  $x \leq 0 \text{ m}$  e  $V(x) = 0 \text{ J}$  per  $x > 0 \text{ m}$  con  $A = 1 \text{ J/m}^4$  e  $B = 9 \text{ J/m}^2$ . In questo campo di forze vengono sistemate con velocità nulla due particelle; la prima,  $m_1 = 0.1 \text{ kg}$ , è collocata nel punto  $x_1 = -10 \text{ m}$ , la seconda,  $m_2 = 0.2 \text{ kg}$ , è posta in  $x_2 = 10 \text{ m}$ . Dopo un certo periodo le due particelle collidono. Calcolare la velocità di  $m_2$  dopo l'urto nel caso di urto puramente elastico. *Parziale Feb. 2003(S:  $v_2^f = 284.41 \text{ m/s}$ )*

#### Esercizio 4

Il potenziale di un campo di forze unidimensionale è  $V(x) = Ax^4 - Bx^2$  per  $x \leq 0 m$  e  $V(x) = 0 J$  per  $x > 0 m$  con  $A = 1 J/m^4$  e  $B = 9 J/m^2$ . In questo campo di forze vengono sistemate con velocità nulla due particelle; la prima,  $m_1 = 0.1 kg$ , è collocata nel punto  $x_1 = -10 m$ , la seconda,  $m_2 = 0.2 kg$ , è posta in  $x_2 = 10 m$ . Dopo un certo periodo le due particelle collidono. Calcolare la velocità di  $m_2$  dopo l'urto nel caso di urto totalmente elastico. (Parziale a.a. 2002/2003 - R:  $v_2^f = 284.41 m/s$ )

#### Esercizio 5

Sia dato un campo di forze unidimensionale la cui energia potenziale è della forma  $V(x) = kx \exp(-\alpha x^2)$  con  $k = 1 J/m$  ed  $\alpha = 2 m^{-2}$ . Calcolarne i punti di equilibrio e dire se sono stabili o instabili. Ad un certo istante una coppia di particelle puntiformi di massa  $m = 2\xi \cdot 10^{-5} kg$  vengono immerse in questo campo di forze. La prima è posta ad  $x = -\infty m$  con una velocità  $v_0$  diretta verso le  $x$  crescenti, la seconda in quiete nel punto di equilibrio stabile del campo. Sapendo che, ad un certo istante, le due particelle si urtano in modo istantaneo e perfettamente anelastico calcolare quanto deve valere, al minimo,  $v_0$  affinché, dopo l'urto, le particelle riescano ad arrivare ad  $x = +\infty m$ . (Trovare una condizione tipo  $v_0 > v_m$ ) (Totale LA 15/12/2003)

#### Esercizio 6

Un punto materiale di massa  $2m$  si muove con velocità  $\vec{v} = 10\hat{i} m/s$  avente direzione orizzontale e giacente su di un piano verticale. Il punto materiale urta elasticamente e istantaneamente una sbarra rigida omogenea di massa  $m$  e lunghezza  $a = 1 m$  incernierata allo stesso piano verticale nel punto  $O$ . La distanza  $OA$  è pari  $a\sqrt{\xi/1000}$ . Determinare la velocità del punto materiale e la velocità angolare della sbarra dopo l'urto. (Totale LA 19/09/2003)

#### Esercizio 7

Un campo di forze unidimensionale ha un energia potenziale descritta dalla funzione  $V(x) = V_0 e^{kx}$  con  $k = 1 m^{-1}$  e  $V_0 = 1 J$  per  $x < 0 m$ , e dalla funzione  $V(x) = 1 J$  per  $x \geq 0 m$ . In questo campo di forze sono immerse due particelle di masse rispettivamente  $m_1 = 4 kg$  ed  $m_2 = [(\xi + 1)/1000] m_1$ . La particella  $m_1$  è collocata ad  $x_1 = -\infty m$  con velocità  $v_0 = \sqrt{\xi + 1} m/s$ , la particella  $m_2$  è ferma in  $x_2 = 10 m$ . Ad un certo istante le particelle collidono in modo totalmente anelastico. Calcolare la velocità  $v_f$  del sistema dopo l'urto. (Parziale 02/03/2004; R:  $v_f = 1000\sqrt{\xi + 1}/2/(1001 + \xi) m/s$ )

#### Esercizio 8

Una particella di massa  $m = 0.1 kg$  e di dimensioni trascurabili viene lanciata da terra verso l'alto con una velocità iniziale pari, in modulo, a  $v_0 = (\xi + 10)/10 m/s$  e diretta ortogonalmente a terra. Nel punto più alto della traiettoria la particella si spezza in due frammenti  $m_1$  ed  $m_2 = 3 m_1$ . La velocità con cui viene prodotto il frammento  $m_1$  è pari, in modulo, a  $v_1 = \sqrt{\xi/1000} m/s$  ed è diretta parallelamente a terra. Trascurando tutte le forze di attrito, calcolare il modulo della velocità del frammento  $m_2$  quando, dopo la discesa, tocca terra. (Parziale 02/03/2004; R:  $v_{m2} = \sqrt{\xi/9000 + (\xi + 10)^2/100} m/s$ )

### Esercizio 9

Un campo di forze unidimensionale ha un'energia potenziale nulla ovunque tranne che nell'intervallo  $-\sqrt{b/a} < x < \sqrt{b/a}$  in cui è descritta dalla funzione  $V(x) = -ax^2 + b$  con  $a = 1 \text{ J m}^{-2}$  e  $b = (\xi/100 + 1) \text{ J}$ . In questo campo di forze sono immerse due particelle di masse rispettivamente  $m_1 = 1 \text{ kg}$  ed  $m_2 = 2 m_1$ . La particella  $m_1$  è collocata ad  $x_1 = -2\sqrt{b/a}$  con velocità  $v_1 = 2\sqrt{b/m_1}$ , la particella  $m_2$  è ferma in  $x_2 = 0 \text{ m}$ . Ad un certo istante le particelle collidono in modo totalmente anelastico. Calcolare la velocità del sistema immediatamente dopo l'urto ( $v_i$ ) e nell'istante in cui esso transita per il punto  $x = 2\sqrt{b/a}$  ( $v_f$ ). (Totale 02/04/2004; R:  $v_i = \sqrt{2(\xi/100 + 1)}/9 \text{ m/s}$ ,  $v_f = \sqrt{8(\xi/100 + 1)}/9 \text{ m/s}$ )