Esercizi di Fisica LB: elettrostatica

Esercitazioni di Fisica LB per ingegneri - A.A. 2003-2004

Esercizio 1

Una carica puntiforme q (per semplicità si immagini che abbia un raggio ϵ molto piccolo) è situata al centro di una sfera cava conduttrice di raggio R. La sfera, inizialmente isolata, ad un certo istante viene messa a terra. Calcolare il lavoro dal campo elettrico per allontanare all'infinito la cariche in eccesso.

Soluzione

La presenza di un campo elettrico in una certa regione dello spazio, si può pensare sempre associata alla presenza di energia in tale regione. Come utilizzare questa energia per risolvere i problemi di elettrostatica? È abbastanza ovvio che differenze di energia possono risultare utili per calcolare il lavoro che un campo elettrico fa quando sposta delle cariche elettriche.
Si consideri la configurazione iniziale del problema. La presenza di una carica elettrica q al centro della sfera produce un campo elettrico. Il campo elettrico avrà direzione radiale rispetto a q visto che il problema ha simmetria sferica. Con il teorema di gauss si dimostra che il suo modulo è

$$E_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

ovunque nello spazio circostante. Se la sfera viene messa a terra, tutte le cariche positive q che sono presenti sulla sua superficie potranno allontanarsi all'infinito per effetto della repulsione dalla carica centrale. Sarà ovviamente il campo elettrico a spingerle all'infinito compiendo un lavoro. Al termine di tale spostamento studiamo la configurazione del sistema. Dentro alla sfera cava il campo elettrico rimane inalterato visto che esso dipende solo dalle cariche interne ad una superficie sferica che contiene q e completamente interna alla sfera cava (teorema di Gauss). All'esterno, invece, esso è ora nullo poichè adesso la somma delle cariche interne ad una superficie sferica che contenga tutto il sistema è zero. Infatti sulla sfera conduttrice rimane la sola carica $-q$ indotta dalla carica centrale.
La densità di energia dovuta alla presenza di un campo elettrico $\vec{E}$ è

$$u_e = \frac{1}{2}\epsilon_0 \vec{E}\cdot\vec{E} \equiv \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$$

quindi l'energia accumulata nello spazio intorno alla sfera conduttrice nella configurazione 1 è:

$$\mathcal{E}_e^1 = \int_{r>R} dV\, u_e = \int_R^\infty 4\pi r^2\, dr \frac{1}{2}\epsilon_0 \frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0^2 r^4} = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 R.}$$

Nella configurazione 2, invece, il campo elettrico esterno alla sfera è nullo quindi

$$\mathcal{E}_e^2 = 0;$$

internamente il campo elettrico rimane inalterato, e quindi anche l'energia rimarrà la stessa. Le due configurazioni hanno un'energia diversa: la prima configurazione ha, in più, tutta l'energia accumulata all'esterno della sfera. Quindi, il lavoro fatto dal campo elettrico per spostare le cariche all'infinito è proprio

$$L_E = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 R.}$$

Esercizio 2

Sulle 2 armature di un condensatore di capacità $C1 = 500\,\mu F$ è disposta la carica Q e $-Q$ rispettivamente, con $Q = \sqrt{\xi}\mu C$. (a) Determinare l'energia elettrostatica accumulata nel condensatore. A tale condensatore viene collegato in parallelo un secondo condensatore, inizialmente scarico, di capacità $C2 = \xi\mu F$. (b) Determinare la carica sulle armature del condensatore $C1$, una volta che è stata raggiunta nuovamente la condizione statica. (c) Determinare l'energia elettrostatica totale accumulata nei due condensatori nello stato finale. (*Totale 01/07/2003*)

Soluzione

Domanda 1: l'energia accumulata nel condensatore è data dall'espressione

$$\mathcal{E}_i = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C_1}.$$

Domanda 2: viene collegato un secondo condensatore C_2 in parallelo a C_1; parte delle cariche di C_1 fluiscono in C_2. Il passaggio si ferma quando l'equilibrio elettrostatico è stato raggiunto. In tali condizioni la il potenziale delle armatura collegate con il filo conduttore è lo stesso. Quindi la differenza di potenziale fra le armature di ciascuno dei condensatori è la stessa. La somma delle cariche che distribuite tra C_1 (Q_1) e C_2 (Q_2) è uguale a Q (la carica totale si conserva).
Quindi vale:

$$\frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2}$$

e

$$Q_1 + Q_2 = Q.$$

Le incognite di questo sistema di equazioni sono Q_1 e Q_2. Risolto dà

$$Q_1 = Q\frac{C_1}{C_1 + C_2}$$

$$Q_2 = Q\frac{C_2}{C_1 + C_2}.$$

Domanda 3: l'energia elettrostatica totale, a questo punto sarà data dalla somma delle energie elettrostatiche accumulate nei singoli condensatori:

$$\mathcal{E}_f = \frac{Q_1^2}{2C_1} + \frac{Q_2^2}{2C_2}.$$

Sostituendo le espressioni trovate per Q_1 e Q_2 si ottiene:

$$\mathcal{E}_f = \frac{Q^2}{2(C_1 + C_2)}.$$

Esercizio 3

All'interno di un condensatore piano di capacitá C_0 si trova un dipolo elettrico. Il dipolo compie piccole oscillazioni di una certa frequenza attorno alla posizione di equilibrio senza alterare in modo sensibile la distribuzione di carica circostante. Calcolare di quanto deve essere piú grande (o piú piccola) rispetto a C_0 la capacitá di un secondo condensatore che, messo in parallelo al condensatore dato, fa in modo che la frequenza delle piccole oscillazioni del dipolo diventi $\frac{1}{2}$ di quella iniziale.

Soluzione

Un dipolo in un campo elettrico costante è soggetto ad un momento delle forze che tende ad allinearlo alla direzione del campo stesso. Tale momento è dato da

$$\vec{M} = \vec{p} \wedge \vec{E}_0$$

dove $\vec{p}$ è il momento di dipolo ed $\vec{E}_0$ è il campo elettrico. È evidente che il modulo di tale momento si annulla quando l'angolo θ compreso fra i due vettori è nullo o uguale a 180°. La configurazione a $\theta = 0$ è di equilibrio stabile, come i si può facilmente rendere conto rappresentando il sistema di forze che agisce sul dipolo, mentre quella a $\theta = 180°$ è di equilibrio instabile. Intorno alla configurazione a $\theta = 0$, si può utilizzare l'approssimazione delle piccole oscillazioni che significa (come per il pendolo fisico) approssimare $\sin\theta \sim \theta$. A questo punto il modulo di $\vec{M}$ si scrive come

$$|\vec{M}| = pE_0\theta.$$

Il momento angolare del dipolo è invece dato dall'espressione $K = I\dot{\theta}$ quindi vale

$$\dot{K} = I\ddot{\theta} = -pE_0\theta$$

e la frequenza delle piccole oscillazioni è data da

$$\nu_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{pE_0}{I}} \propto \sqrt{E_0.}$$

Per dimezzare tale frequenza bisogna che il modulo del campo elettrico all'interno del condensatore che contiene il dipolo diventi $1/4$ del valore iniziale. Visto che il campo all'interno di un condensatore è proporzionale alla carica presente sulle sue armature allora $Q \to Q_f = Q/4$. Per fare diminuire il campo elettrico nel condensatore si può aggiungere un condensatore in parallelo con capacità C_1 che si 'porti via' una parte di Q per fare scendere la carica di C_0 al valore Q_f. Aggiungendo C_1 la carica si ridistribuisce secondo le equazioni

$$Q = Q_f + Q_1$$

essendo Q_1 la carica che finisce su C_1, e

$$\frac{Q_f}{C_f} = \frac{Q_1}{C_1}.$$

Questa coppia di equazioni contengono due variabili: Q_1 e C_1 dal momento che Q_f è noto. Se risolte danno il risultato cercato:

$$C_1 = 3C_0.$$