Esercizi di Statica

Esercitazioni di Fisica LA per ingegneri - A.A. 2004-2005

Esercizio 4

Sul piano cartesiano xy sono dati una sbarretta omogenea di massa $m_1 = 2\,kg$, lunga $10\,cm$ e posizionata sul semiasse poisitivo delle ordinate con un estremo nell'origine e il punto $P_2 : (3, 2)\,cm$ di massa $m_2 = 1\,kg$. Calcolare la posizione del baricentro del sistema.

Soluzione

La sbarretta ha una densità lineare pari a $\lambda = m/l$ essendo $l = 10\,cm$ la sua lunghezza. Il suo baricentro ha come posizione (per definizione):

$$\vec{r}_B = \frac{\sum_i m_i g \vec{r}_i}{\sum_i m_i g} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{m_t}$$

in cui con il pedice i indico tutti i punti materiali (di massa m_i) di cui è composto il sistema (di massa totale m_t) di cui si vuole calcolare detto baricentro. Nel nostro caso, la sbarretta è un continuo di punti materiali quindi la definizione deve essere modificata introducendo al posto della sommatoria un'integrazione. Quindi si ha

$$\sum_i \to \int_0^{10}, \quad m_i \to dm = \lambda dy$$

visto che la sbarretta si trova lungo l'asse y e quindi anche il suo baricentro si trova su tale asse. la sua coordinata y è perciò:

$$y_b = \frac{\int_0^{10} y\lambda dy}{m_1} = \frac{\frac{1}{2}m_1 \cdot l}{m_1} = \frac{1}{2}l$$

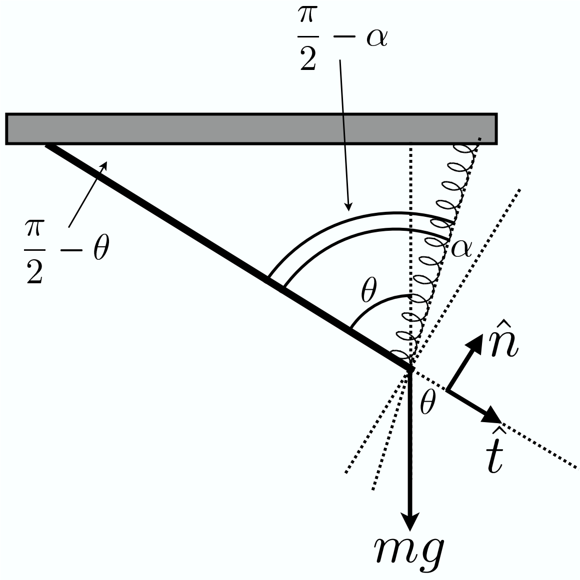
ovvero il suo baricentro si trova nel suo punto di mezzo, come del resto ci si poteva aspettare e si poteva quindi arguire senza fare il conto. Il baricentro del sistema totale sbarretta+punto materiale, a questo punto, è il baricentro dei due baricentri:

$$x_B = \frac{m_1 x_b + 3m_2}{m_1 + m_2} = \frac{3}{3} = 1\,cm$$

$$y_B = \frac{m_1 y_b + 2m_2}{m_1 + m_2} = \frac{2\frac{l}{2} + 2}{3}\,cm = 4\,cm$$

ovvero

$$\vec{r}_B = (\hat{i} + 4\hat{j})\,cm$$



,

Esercizi d'esame

Esercizio 2

Un punto materiale di massa $m = 1.2\,kg$ (vedi FIG.14) é fissato al soffitto tramite un cavo inestensibile di massa trascurabile di lunghezza $r = 1.2\,m$ ed una molla di lunghezza a riposo trascurabile ($l_0 = 0\,m$) e costante elastica $k = 40\,N/m$. Cavo e molla sono entrambi fissati in un'estremitá al soffitto (a distanza r l'uno dall'altro) e nell'altra ad m. Calcolare, all'equilibrio, la distanza d del punto dal soffitto. (*Totale 28/3/2003* R: $d = 0.286\,m$)

Soluzione

Il triangolo formato da cavo, molla e soffitto è isoscele, quindi i suoi angoli sono acuti. Imposto le equazioni della statica e proietto lungo $\hat{n}$:

$$\vec{R} \cdot \hat{n} = k\Delta l \cos\alpha - mg \sin\theta = 0,$$

poi utilizzo il teorema dei seni per correlare θ ed α tenendo presente che il lato della molla è lungo quanto il suo allungamento visto che le sue dimensioni a riposo sono trascurabili:

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{r} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{\Delta l}.$$

Siccome

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \cos\theta$$

dall'equazione precedente si ha

$$\cos\alpha = \frac{r}{\Delta l}\cos\theta$$

che sostituita nella condizione di staticità dà:

$$mg \sin\theta = kr \cos\theta \Rightarrow \tan\theta = \frac{kr}{mg} \Rightarrow \theta = \arctan\frac{kr}{mg}.$$

La distanza dal soffitto è quindi

$$d = r\cos\theta$$