Fisica Generale L-A

1. Esercizi sui vettori

http://ishtar.df.unibo.it/Uni/bo/ingegneria/all/galli/stuff/trasparenze/AE01-Vettori.pdf

15/01/2005

Esercizio 1

- Due vettori, di modulo, rispettivamente $\|\vec{a}\| = 2$ e $\|\vec{b}\| = 3$, posti con l'origine coincidente, formano tra loro un angolo di $\theta = (\xi/1000)\pi$ rad.
- Trovare la norma del vettore: $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$.
- Trovare inoltre l'angolo φ compreso tra i vettori $\vec{a}$ e $\vec{c}$ (espresso in radianti).
- $\xi = 600$.

Esercizio 1 (II)

- Abbiamo, innanzitutto:

$$\theta = \frac{600}{1000} 3.14159 = 1.88495\,\text{rad}$$

- Per il teorema di Carnot (o dei coseni) si ha:

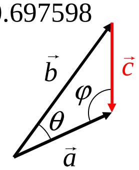
$$\|\vec{c}\| = \|\vec{a} - \vec{b}\| = \sqrt{\|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - 2\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos\theta} = \sqrt{4 + 9 - 12\cos 1.88495} =$$

$$= \sqrt{13 - 12(-0.309012)} = \sqrt{13 + 3.70814} = 4.09$$

- Per il teorema dei seni si ha inoltre:

$$\frac{\|\vec{b}\|}{\sin\varphi} = \frac{\|\vec{a} - \vec{b}\|}{\sin\theta} \Rightarrow \sin\varphi = \frac{\|\vec{b}\|}{\|\vec{a} - \vec{b}\|}\sin\theta = \frac{3}{4.09}\sin(1.88495) = 0.697598$$

$$\varphi = \arcsin(0.697598) = 0.772\,\text{rad}$$



Esercizio 2

- Due vettori, di modulo, rispettivamente $\|\vec{a}\| = 2$ e $\|\vec{b}\| = 3$, posti con l'origine coincidente, formano tra loro un angolo di $\theta = (\xi/1000)\pi$ rad.
- Trovare la norma del vettore: $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.
- Trovare inoltre l'angolo φ compreso tra i vettori $\vec{a}$ e $\vec{c}$ (espresso in radianti).
- $\xi = 600$.

Esercizio 2 (II)

- Abbiamo, innanzitutto:

$$\theta = \frac{600}{1000} 3.14159 = 1.88495\,\text{rad}$$

- Per il teorema di Carnot (o dei coseni) si ha:

$$\|\vec{c}\| = \|\vec{a}+\vec{b}\| = \sqrt{\|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - 2\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos\chi}$$

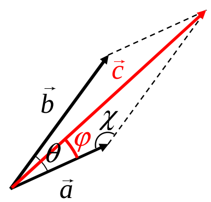
dove l'angolo χ è supplementare all'angolo θ:

$$\chi + \theta = \pi \quad \Rightarrow \quad \chi = \pi - \theta \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \cos\chi = -\cos\theta \\ \sin\chi = \sin\theta \end{cases}$$

per cui:

$$\|\vec{c}\| = \|\vec{a}+\vec{b}\| = \sqrt{\|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 + 2\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos\theta} = \sqrt{4+9+12\cos 1.88495} =$$

$$= \sqrt{13+12(-0.309012)} = \sqrt{13-3.70814} = 3.05$$



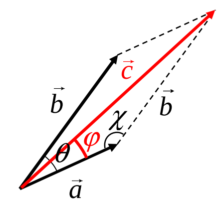
Esercizio 2 (III)

- Per il teorema dei seni si ha inoltre:

$$\frac{\|\vec{b}\|}{\sin\varphi} = \frac{\|\vec{a}+\vec{b}\|}{\sin\chi} = \frac{\|\vec{a}+\vec{b}\|}{\sin\theta}$$

$$\sin\varphi = \frac{\|\vec{b}\|}{\|\vec{a}+\vec{b}\|}\sin\theta = \frac{3}{3.05}\sin(1.88495) = 0.935467$$

$$\varphi = \arcsin(0.935467) = 1.21\,\text{rad}$$



Esercizio 3

- In un piano sono fissati due assi cartesiani ortogonali x e y (di versori rispettivamente $\hat{\imath}$ e $\hat{\jmath}$).
- Dati i due vettori:

$$\begin{cases} \vec{a} = -2\hat{\imath} + \hat{\jmath} \\ \vec{b} = 5\hat{\imath} - 7\hat{\jmath} \end{cases}$$

- Determinare la norma e l'angolo formato con il versore $\hat{\imath}$ della somma e della differenza dei due vettori $\vec{a}+\vec{b}$ e $\vec{a}-\vec{b}$.

Esercizio 3 (II)

- Possiamo innanzitutto calcolare la somma e la differenza vettoriale nella rappresentazione cartesiana:

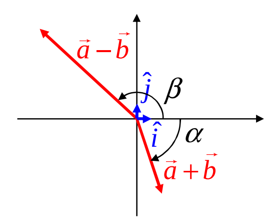
$$\begin{cases} \vec{a} = -2\hat{\imath} + \hat{\jmath} \\ \vec{b} = 5\hat{\imath} - 7\hat{\jmath} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{a}+\vec{b} = 3\hat{\imath} - 6\hat{\jmath} \\ \vec{a}-\vec{b} = -7\hat{\imath} + 8\hat{\jmath} \end{cases}$$

- Possiamo quindi calcolare le norme:

$$\begin{cases} \|\vec{a}+\vec{b}\| = \sqrt{3^2+6^2} = \sqrt{45} = 6.71 \\ \|\vec{a}-\vec{b}\| = \sqrt{7^2+8^2} = \sqrt{113} = 10.63 \end{cases}$$

- Per quanto riguarda gli angoli, abbiamo:

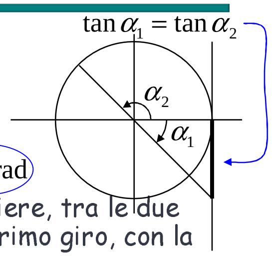
$$\begin{cases} \tan\alpha = \dfrac{(\vec{a}+\vec{b})_y}{(\vec{a}+\vec{b})_x} = \dfrac{-6}{3} = -2 \\ \tan\beta = \dfrac{(\vec{a}-\vec{b})_y}{(\vec{a}-\vec{b})_x} = \dfrac{8}{-7} = -\dfrac{8}{7} \end{cases}$$



Esercizio 3 (III)

- Da cui:

$$\begin{cases}\tan\alpha = -2 \\ \tan\beta = -\dfrac{8}{7}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha = \begin{cases}\arctan(-2) = -1.11\,\text{rad} \\ \pi + \arctan(-2) = 2.03\,\text{rad}\end{cases} \\ \beta = \begin{cases}\arctan(-8/7) = -0.85\,\text{rad} \\ \pi + \arctan(-8/7) = 2.29\,\text{rad}\end{cases}\end{cases}$$

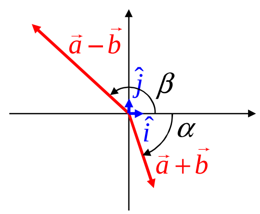


- Occorre a questo punto precauzione nello scegliere, tra le due soluzioni, quella corretta (ci sono 2 angoli, nel primo giro, con la stessa tangente, vedi figura).
- Nel caso della somma, la componente x è positiva mentre la componente y è negativa (vedi figura). Avremo perciò:

$$\alpha = -1.11\,\text{rad}$$

- Nel caso della differenza, la componente x è negativa mentre la componente y è positiva. Avremo perciò:

$$\beta = 2.29\,\text{rad}$$



Esercizio 4

- Fissata una terna cartesiana ortogonale xyz e dati i due vettori:

$$\vec a = 11\hat\imath - 7\hat\jmath + 9\hat k$$
$$\vec b = 14\hat\imath + 5\hat\jmath - \hat k$$

determinare, nella rappresentazione cartesiana, i vettori:

$$\vec a + \vec b$$
$$\vec a - \vec b$$

- Determinare inoltre, per tali vettori, la norma e i 3 angoli formati con gli assi cartesiani.

Esercizio 4 (II)

- I vettori somma e differenza, nella rappresentazione cartesiana, si trovano semplicemente sommando e sottraendo le componenti:

$$\left.\begin{aligned}\vec a &= 11\hat\imath - 7\hat\jmath + 9\hat k \\ \vec b &= 14\hat\imath + 5\hat\jmath - \hat k\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases}\vec a + \vec b = 25\hat\imath - 2\hat\jmath + 8\hat k \\ \vec a - \vec b = -3\hat\imath - 12\hat\jmath + 10\hat k\end{cases}$$

- Le norme si calcolano direttamente dalle componenti:

$$\|\vec a + \vec b\| = \sqrt{\left(\vec a + \vec b\right)_x^2 + \left(\vec a + \vec b\right)_y^2 + \left(\vec a + \vec b\right)_z^2} = \sqrt{625 + 4 + 64} = \sqrt{693} = 26.3$$

$$\|\vec a - \vec b\| = \sqrt{\left(\vec a - \vec b\right)_x^2 + \left(\vec a - \vec b\right)_y^2 + \left(\vec a - \vec b\right)_z^2} = \sqrt{9 + 144 + 100} = \sqrt{253} = 15.9$$

Esercizio 4 (III)

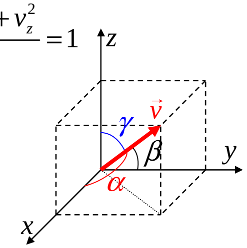
- Per quanto riguarda i 3 angoli osserviamo che per un vettore generico $\vec v$ (vedi figura) si ha:

$$\begin{cases}v_x = \vec v \bullet \hat\imath = \|\vec v\|\cos\alpha \\ v_y = \vec v \bullet \hat\jmath = \|\vec v\|\cos\beta \\ v_z = \vec v \bullet \hat k = \|\vec v\|\cos\gamma\end{cases} \qquad \begin{cases}\cos\alpha = \dfrac{v_x}{\|\vec v\|} \\ \cos\beta = \dfrac{v_y}{\|\vec v\|} \\ \cos\gamma = \dfrac{v_z}{\|\vec v\|}\end{cases}$$

- Questi 3 coseni prendono il nome di **coseni direttori**. Essi non sono tra loro indipendenti in quanto sono legati dalla relazione:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{v_x^2}{\|\vec v\|^2} + \frac{v_y^2}{\|\vec v\|^2} + \frac{v_z^2}{\|\vec v\|^2} = \frac{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}{\|\vec v\|^2} = 1$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$



Esercizio 4 (IV)

- Nei nostri due casi le uguaglianze:

$$\cos\alpha = \frac{v_x}{\|\vec{v}\|},\quad \cos\beta = \frac{v_y}{\|\vec{v}\|},\quad \cos\gamma = \frac{v_z}{\|\vec{v}\|}$$

si scrivono:

$$\cos\alpha_+ = \frac{\left(\vec{a}+\vec{b}\right)_x}{\left\|\vec{a}+\vec{b}\right\|},\quad \cos\beta_+ = \frac{\left(\vec{a}+\vec{b}\right)_y}{\left\|\vec{a}+\vec{b}\right\|},\quad \cos\gamma_+ = \frac{\left(\vec{a}+\vec{b}\right)_z}{\left\|\vec{a}+\vec{b}\right\|}$$

$$\cos\alpha_- = \frac{\left(\vec{a}-\vec{b}\right)_x}{\left\|\vec{a}-\vec{b}\right\|},\quad \cos\beta_- = \frac{\left(\vec{a}-\vec{b}\right)_y}{\left\|\vec{a}-\vec{b}\right\|},\quad \cos\gamma_- = \frac{\left(\vec{a}-\vec{b}\right)_z}{\left\|\vec{a}-\vec{b}\right\|}$$

Esercizio 4 (V)

- Poiché:

$$\begin{cases} \vec{a}+\vec{b} = 25\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + 8\hat{k} \\ \vec{a}-\vec{b} = -3\hat{\imath} - 12\hat{\jmath} + 10\hat{k} \end{cases},\quad \begin{cases} \left\|\vec{a}+\vec{b}\right\| = 26.3 \\ \left\|\vec{a}-\vec{b}\right\| = 15.9 \end{cases}$$

- Si ha:

$$\begin{cases} \alpha_+ = \arccos\frac{25}{26.3} = 0.32\,\text{rad} \\ \beta_+ = \arccos\frac{-2}{26.3} = 1.65\,\text{rad} \\ \gamma_+ = \arccos\frac{8}{26.3} = 1.26\,\text{rad} \end{cases}\quad \begin{cases} \alpha_- = \arccos\frac{-3}{15.9} = 1.76\,\text{rad} \\ \beta_- = \arccos\frac{-12}{15.9} = 2.43\,\text{rad} \\ \gamma_- = \arccos\frac{10}{15.9} = 0.89\,\text{rad} \end{cases}$$

Esercizio 5

- Sia fissata una terna cartesiana ortogonale xyz e siano dati i due vettori:

$$\vec{a} = 11\hat{\imath} - 7\hat{\jmath} + 9\hat{k}$$

$$\vec{b} = 14\hat{\imath} + 5\hat{\jmath} - \hat{k}$$

- Determinare il prodotto scalare $\vec{a}\bullet\vec{b}$.
- Determinare, la norma e gli angoli formati con gli assi cartesiani del prodotto vettoriale: $\vec{a}\wedge\vec{b}$.

Esercizio 5 (II)

- Per quanto riguarda il prodotto scalare:

$$\left.\begin{aligned} \vec{a} &= 11\hat{\imath} - 7\hat{\jmath} + 9\hat{k} \\ \vec{b} &= 14\hat{\imath} + 5\hat{\jmath} - \hat{k} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{a}\bullet\vec{b} = 11\times 14 - 7\times 5 + 9\times(-1) = 110$$

- Per quanto riguarda il prodotto vettoriale:

$$\vec{a}\wedge\vec{b} = \det\begin{Vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 11 & -7 & 9 \\ 14 & 5 & -1 \end{Vmatrix} = \hat{\imath}\det\begin{Vmatrix} -7 & 9 \\ 5 & -1 \end{Vmatrix} - \hat{\jmath}\det\begin{Vmatrix} 11 & 9 \\ 14 & -1 \end{Vmatrix} + \hat{k}\det\begin{Vmatrix} 11 & -7 \\ 14 & 5 \end{Vmatrix} =$$

$$= (7-45)\,\hat{\imath} - (-11-126)\,\hat{\jmath} + (55+98)\,\hat{k} = -38\hat{\imath} + 137\hat{\jmath} + 153\hat{k}$$

- La sua norma è:

$$\left\|\vec{a}\wedge\vec{b}\right\| = \sqrt{38^2 + 137^2 + 153^2} = 208.9$$

Esercizio 5 (III)

- Calcoliamo gli angoli utilizzando i coseni direttori:

$$\cos\alpha = \frac{\left(\vec{a}\wedge\vec{b}\right)_x}{\left\|\vec{a}\wedge\vec{b}\right\|}, \quad \cos\beta = \frac{\left(\vec{a}\wedge\vec{b}\right)_y}{\left\|\vec{a}\wedge\vec{b}\right\|}, \quad \cos\gamma = \frac{\left(\vec{a}\wedge\vec{b}\right)_z}{\left\|\vec{a}\wedge\vec{b}\right\|}$$

$$\begin{cases} \vec{a}\wedge\vec{b} = -38\hat{\imath} + 137\hat{\jmath} + 153\hat{k} \\ \left\|\vec{a}\wedge\vec{b}\right\| = 208.9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = \arccos\dfrac{-38}{208.9} = 1.75\,\text{rad} \\ \beta = \arccos\dfrac{137}{208.9} = 0.856\,\text{rad} \\ \gamma = \arccos\dfrac{153}{208.9} = 0.749\,\text{rad} \end{cases}$$

Esercizio 6

- Calcolare il volume del parallelepipedo che ha per spigoli i 3 segmenti AB, AC e AD, dove le coordinate dei punti A, B, C e D, rispetto a una terna ortogonale prefissata sono (in centimetri):
  $A(28,35,-16),\ B(43,62,-24),\ C(-13,47,18),\ D(30,26,-22)$

Esercizio 6 (II)

- Abbiamo:
  $A(28,35,-16),\ B(43,62,-24),\ C(-13,47,18),\ D(30,26,-22)$

$$\begin{cases} B-A = 15\hat{\imath} + 27\hat{\jmath} - 8\hat{k} \\ C-A = -41\hat{\imath} + 12\hat{\jmath} + 34\hat{k} \\ D-A = 2\hat{\imath} - 9\hat{\jmath} - 6\hat{k} \end{cases}$$

$$(B-A)\wedge(C-A)\bullet(D-A) = \det\begin{Vmatrix} 15 & 27 & -8 \\ -41 & 12 & 34 \\ 2 & -9 & -6 \end{Vmatrix} =$$

$$= 15\det\begin{Vmatrix} 12 & 34 \\ -9 & -6 \end{Vmatrix} - 27\det\begin{Vmatrix} -41 & 34 \\ 2 & -6 \end{Vmatrix} - 8\det\begin{Vmatrix} -41 & 12 \\ 2 & -9 \end{Vmatrix} =$$

$$= 15(-72+306) - 27(246-68) - 8(369-24) =$$

$$= 15\times 234 - 27\times 178 - 8\times 345 = -4096$$

$$V = \left|(B-A)\wedge(C-A)\bullet(D-A)\right| = 4096$$