Fisica Generale L-A

4. Esercizi sui vettori applicati

http://ishtar.df.unibo.it/Uni/bo/ingegneria/all/galli/stuff/trasparenze/AE04-VettoriApplicati.pdf

24/01/2005

Esercizio 1

- In una prefissata terna cartesiana, il vettore:
  $\vec{a} = 3\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k}$
  è applicato nel punto:
  $A(1,0,1)$
- Calcolare il suo momento rispetto all'origine $O(0, 0, 0)$ e il suo momento assiale rispetto all'asse x.

Esercizio 1 (II)

- Il momento polare rispetto all'origine $O(0, 0, 0)$ è dato da:
  $\vec{\mathcal{M}}_{(O)} = (A-O) \wedge \vec{a}$

$$A(1,0,1),\ \ O(0,0,0)$$

$$\begin{cases} A-O = (1-0)\hat{i} + (0-0)\hat{j} + (1-0)\hat{k} = \hat{i} + \hat{k} \\ \vec{a} = 3\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k} \end{cases}$$

$$\vec{\mathcal{M}}_{(O)} = (A-O) \wedge \vec{a} = \det \begin{Vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & -4 & 2 \end{Vmatrix} =$$

$$= (-1)\det \begin{Vmatrix} \hat{j} & \hat{k} \\ -4 & 2 \end{Vmatrix} + 0 + (-1)\det \begin{Vmatrix} \hat{i} & \hat{j} \\ 3 & -4 \end{Vmatrix} =$$

$$= (-1)\left(2\hat{j} + 4\hat{k}\right) + (-1)\left(-4\hat{i} - 3\hat{j}\right) = 4\hat{i} + \hat{j} - 4\hat{k}$$

Esercizio 1 (III)

- Ricordando che in generale il momento assiale rispetto all'asse u è dato da:

$$\mathcal{M}_u = (P-O) \wedge \vec{F} \bullet \hat{u}, \quad O \in u$$

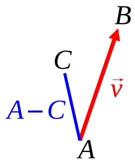
nel nostro caso avremo, poiché l'origine $O(0, 0, 0)$ appartiene all'asse x:

$$\mathcal{M}_x = (P-O) \wedge \vec{a} \bullet \hat{i} = \vec{\mathcal{M}}_{(O)} \bullet \hat{i} = \left(4\hat{i} + \hat{j} - 4\hat{k}\right) \bullet \hat{i} = 4$$

Esercizio 2

- In una prefissata terna cartesiana, un vettore ha origine nel punto $A(1, 3, 5)$ e vertice nel punto $B(1, 1, 2)$.
- Calcolare:
  - Il momento del vettore rispetto al punto $C(0, 0, 1)$.
  - Il momento assiale del vettore rispetto alla retta che passa per C e che ha come versore:

$$\hat{u} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\hat{\imath} + \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{\jmath} - \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{k}$$



Esercizio 2 (II)

- Il vettore in questione si scrive, nella rappresentazione cartesiana, come:

$$\left.\begin{array}{l} A(1,3,5) \\ B(1,1,2) \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{v} = B - A = -2\hat{\jmath} - 3\hat{k}$$

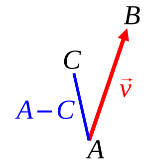
- Il momento polare rispetto a $C(0, 0, 1)$ è dato da:

$$\vec{\mathcal{M}}_{(O)} = (A - C) \wedge \vec{v}$$

$$C(0,0,1)$$

$$A - C = (1-0)\hat{\imath} + (3-0)\hat{\jmath} + (5-1)\hat{k} = \hat{\imath} + 3\hat{\jmath} + 4\hat{k}$$

$$\vec{\mathcal{M}}_{(O)} = \left(\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} + 4\hat{k}\right) \wedge \left(-2\hat{\jmath} - 3\hat{k}\right) = \det\begin{Vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -2 \end{Vmatrix} =$$



Esercizio 2 (III)

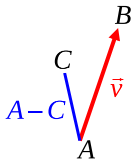
$$\vec{\mathcal{M}}_{(O)} = \det\begin{Vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -3 \end{Vmatrix} = 0 - (-2)\det\begin{Vmatrix} \hat{\imath} & \hat{k} \\ 1 & 4 \end{Vmatrix} + (-3)\det\begin{Vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} \\ 1 & 3 \end{Vmatrix} =$$

$$= 2\left(4\hat{\imath} - \hat{k}\right) - 3\left(3\hat{\imath} - \hat{\jmath}\right) = -\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} - 2\hat{k}$$

- Il momento assiale rispetto alla retta passante per C e parallela al versore u è dato da:

$$\mathcal{M}_u = (A - C) \wedge \vec{v} \bullet \hat{u} = \vec{\mathcal{M}}_{(O)} \bullet \hat{u} = \left(-\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} - 2\hat{k}\right) \bullet \frac{1}{\sqrt{3}}\left(-\hat{\imath} + \hat{\jmath} - \hat{k}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}(1 + 3 + 2) = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} = 3.46$$



Esercizio 3

- Calcolare il momento risultante dei vettori $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, $\vec{F}_4$, applicati nei punti P_1, P_2, P_3, P_4, rispetto al punto A, sapendo che in una terna ortogonale fissata si ha:

$$\vec{F}_1 = 3\hat{\imath} - 5\hat{\jmath} - \hat{k} \qquad P_1(6,-2,4)$$

$$\vec{F}_2 = -2\hat{\imath} \qquad P_2(9,-3,-8)$$

$$\vec{F}_3 = 8\hat{\jmath} - \hat{k} \qquad P_3(0,0,4)$$

$$\vec{F}_4 = -6\hat{\imath} + 2\hat{k} \qquad P_4(5,5,4)$$

$$A(6,-7,4)$$

Esercizio 3 (II)

- Il momento risultante è dato da:

$$\vec{\mathscr{M}}_{(A)} = \sum_{i=1}^{4} \left(P_i - A\right) \wedge \vec{F}_i$$

- Nel nostro caso:

$$\left.\begin{array}{l} P_1(6,-2,4) \\ P_2(9,-3,-8) \\ P_3(0,0,4) \\ P_4(5,5,4) \\ A(6,-7,4) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} P_1 - A = 5\hat{j} \\ P_2 - A = 3\hat{i} + 4\hat{j} - 12\hat{k} \\ P_3 - A = -6\hat{i} + 7\hat{j} \\ P_4 - A = -\hat{i} + 12\hat{j} \end{array}\right.$$

- Ricordando le relazioni di ortonormalità tra i versori cartesiani:

$$\hat{i} \wedge \hat{i} = \vec{0}, \quad \hat{j} \wedge \hat{j} = \vec{0}, \quad \hat{k} \wedge \hat{k} = \vec{0}$$

$$\hat{i} \wedge \hat{j} = \hat{k}, \quad \hat{j} \wedge \hat{k} = \hat{i}, \quad \hat{k} \wedge \hat{i} = \hat{j}$$

Esercizio 3 (III)

- Otteniamo:

$$\vec{\mathscr{M}}_{(A)} = 5\hat{j} \wedge \left(3\hat{i} - \cancel{5\hat{j}} - \hat{k}\right) + \left(\cancel{3\hat{i}} + 4\hat{j} - 12\hat{k}\right) \wedge \left(-2\hat{i}\right) +$$

$$+\left(-6\hat{i} + 7\hat{j}\right) \wedge \left(8\hat{j} - \hat{k}\right) + \left(-\hat{i} + 12\hat{j}\right) \wedge \left(-6\hat{i} + 2\hat{k}\right)$$

$$\vec{\mathscr{M}}_{(A)} = \left(-15\hat{k} - 5\hat{i}\right) + \left(8\hat{k} + 24\hat{j}\right) + \left(-48\hat{k} - 6\hat{j} - 7\hat{i}\right) + \left(2\hat{j} + 72\hat{k} + 24\hat{i}\right) =$$

$$= 12\hat{i} + 20\hat{j} + 17\hat{k}$$

Esercizio 4

- Dati i due vettori:

$$\vec{u}_1 = -3\hat{j}$$

$$\vec{u}_2 = -4\hat{j}$$

applicati rispettivamente nei punti:

$$P_1(-1,0,0)$$

$$P_2(2,0,0)$$

- Trovare, se esiste, un vettore applicato equivalente ai due e il suo punto di applicazione.

Esercizio 4 (II)

- Per calcolare i momenti occorre un centro di riduzione, anche se il risultato deve risultare indipendente dalla scelta di tale centro di riduzione. Scegliamo perciò, come centro di riduzione, il punto generico:

$$C\left(C_x, C_y, C_z\right)$$

- La risultante si scrive:

$$\vec{\mathscr{R}} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 = -3\hat{j} - 4\hat{j} = -7\hat{j}$$

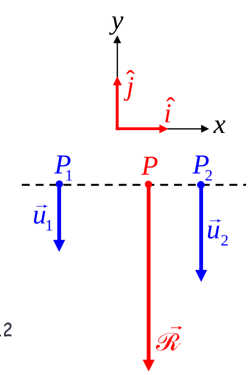
- Il momento risultante si scrive:

$$\vec{\mathscr{M}}_{(C)} = \left(P_1 - C\right) \wedge \vec{u}_1 + \left(P_2 - C\right) \wedge \vec{u}_2$$

- Si ha:

$$P_1 - C = \left(-1 - C_x\right)\hat{i} - C_y\hat{j} - C_z\hat{k}$$

$$P_2 - C = \left(2 - C_x\right)\hat{i} - C_y\hat{j} - C_z\hat{k}$$



Esercizio 4 (III)

- Dunque:

$$(P_1-C)\wedge\vec{u}_1=\left[(-1-C_x)\hat{\imath}-\cancel{C_y}\hat{\jmath}-C_z\hat{k}\right]\wedge(-3\hat{\jmath})=3(1+C_x)\hat{k}-3C_z\hat{\imath}$$

$$(P_2-C)\wedge\vec{u}_2=\left[(2-C_x)\hat{\imath}-\cancel{C_y\hat{\jmath}}-C_z\hat{k}\right]\wedge(-4\hat{\jmath})=4(C_x-2)\hat{k}-4C_z\hat{\imath}$$

$$\vec{\mathscr{M}}_{(C)}=(P_1-C)\wedge\vec{u}_1+(P_2-C)\wedge\vec{u}_2=$$

$$=3(1+C_x)\hat{k}-3C_z\hat{\imath}+4(C_x-2)\hat{k}-4C_z\hat{\imath}=$$

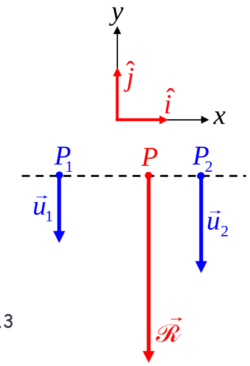
$$=(7C_x-5)\hat{k}-7C_z\hat{\imath}$$

- Cerchiamo ora un punto di applicazione:

$$P(P_x,P_y,P_z)$$

tale che:

$$(P-C)\wedge\vec{\mathscr{R}}=\vec{\mathscr{M}}_{(C)}=(P_1-C)\wedge\vec{u}_1+(P_2-C)\wedge\vec{u}_2$$



Esercizio 4 (IV)

- Avremo:

$$(P-C)\wedge\vec{\mathscr{R}}=\vec{\mathscr{M}}_{(C)}=(P_1-C)\wedge\vec{u}_1+(P_2-C)\wedge\vec{u}_2$$

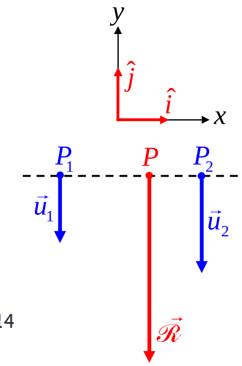
$$\left[(P_x-C_x)\hat{\imath}+\cancel{(P_y-C_y)\hat{\jmath}}+(P_z-C_z)\hat{k}\right]\wedge(-7\hat{\jmath})=(7C_x-5)\hat{k}-7C_z\hat{\imath}$$

$$-7(P_x-C_x)\hat{k}+7(P_z-C_z)\hat{\imath}=(7C_x-5)\hat{k}-7C_z\hat{\imath}$$

- Due vettori sono uguali se sono rispettivamente uguali le componenti cartesiane, per cui:

$$\begin{cases}-7(P_x-\cancel{C_x})=7\cancel{C_x}-5\\ 7(P_z-\cancel{C_z})=\cancel{-7C_z}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}P_x=\dfrac{5}{7}\\ P_z=0\end{cases}$$

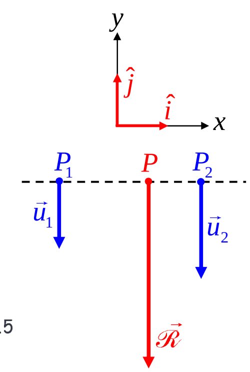
- Le componenti del centro di riduzione C si semplificano, come ci aspettavamo, in quanto non debbono influire sul risultato.



Esercizio 4 (V)

- Il **vettore applicato equivalente** dunque **esiste**. Vettore e punto di applicazione sono dati da:

$$\begin{cases}\vec{\mathscr{R}}=-7\hat{\jmath}\\ P=\left(\dfrac{5}{7},0,P_z\right), \quad P_z\in\mathbb{R}\end{cases}$$



Esercizio 5

- Dati i due vettori:

$$\vec{u}_1=-2\hat{\jmath}$$

$$\vec{u}_2=4\hat{\jmath}$$

applicati rispettivamente nei punti:

$$P_1(-2,0,0)$$

$$P_2(3,0,0)$$

- Trovare, se esiste, un vettore applicato equivalente ai due e il suo punto di applicazione.

Esercizio 5 (II)

- Per calcolare i momenti occorre un centro di riduzione, anche se il risultato deve risultare indipendente dalla scelta di tale centro di riduzione. Scegliamo perciò, come centro di riduzione, il punto generico:

  $C(C_x, C_y, C_z)$

- La risultante si scrive:

  $\vec{\mathscr{R}} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 = -2\hat{\jmath} + 4\hat{\jmath} = 2\hat{\jmath}$

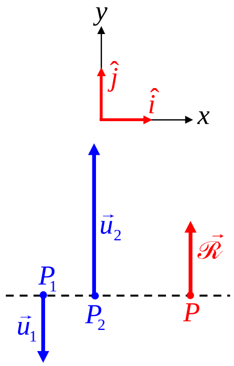
- Il momento risultante si scrive:

  $\vec{\mathscr{M}}_{(C)} = (P_1 - C)\wedge\vec{u}_1 + (P_2 - C)\wedge\vec{u}_2$

- Si ha:

  $P_1 - C = (-2 - C_x)\hat{\imath} - C_y\hat{\jmath} - C_z\hat{k}$

  $P_2 - C = (3 - C_x)\hat{\imath} - C_y\hat{\jmath} - C_z\hat{k}$



Esercizio 5 (III)

- Dunque:

  $(P_1 - C)\wedge\vec{u}_1 = \left[(-2 - C_x)\hat{\imath} - \cancel{C_y\hat{\jmath}} - C_z\hat{k}\right]\wedge(-2\hat{\jmath}) = 2(2 + C_x)\hat{k} - 2C_z\hat{\imath}$

  $(P_2 - C)\wedge\vec{u}_2 = \left[(3 - C_x)\hat{\imath} - \cancel{C_y\hat{\jmath}} - C_z\hat{k}\right]\wedge 4\hat{\jmath} = 4(3 - C_x)\hat{k} + 4C_z\hat{\imath}$

  $\vec{\mathscr{M}}_{(C)} = (P_1 - C)\wedge\vec{u}_1 + (P_2 - C)\wedge\vec{u}_2 =$

  $= 2(2 + C_x)\hat{k} - 2C_z\hat{\imath} + 4(3 - C_x)\hat{k} + 4C_z\hat{\imath} =$

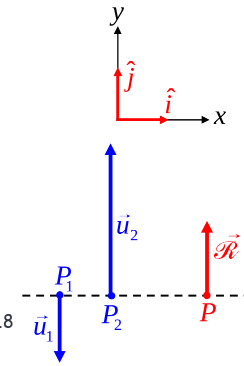
  $= (16 - 2C_x)\hat{k} + 2C_z\hat{\imath}$

- Cerchiamo ora un punto di applicazione:

  $P(P_x, P_y, P_z)$

  tale che:

  $(P - C)\wedge\vec{\mathscr{R}} = \vec{\mathscr{M}}_{(C)} = (P_1 - C)\wedge\vec{u}_1 + (P_2 - C)\wedge\vec{u}_2$



Esercizio 5 (IV)

- Avremo:

  $(P - C)\wedge\vec{\mathscr{R}} = \vec{\mathscr{M}}_{(C)} = (P_1 - C)\wedge\vec{u}_1 + (P_2 - C)\wedge\vec{u}_2$

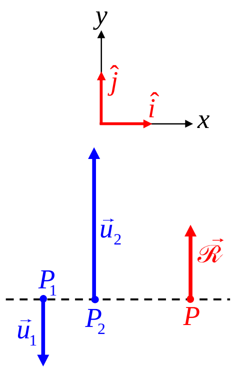
  $\left[(P_x - C_x)\hat{\imath} + \cancel{(P_y - C_y)\hat{\jmath}} + (P_z - C_z)\hat{k}\right]\wedge 2\hat{\jmath} = (16 - 2C_x)\hat{k} + 2C_z\hat{\imath}$

  $2(P_x - C_x)\hat{k} - 2(P_z - C_z)\hat{\imath} = (16 - 2C_x)\hat{k} + 2C_z\hat{\imath}$

- Due vettori sono uguali se sono rispettivamente uguali le componenti cartesiane, per cui:

  $$\begin{cases} 2(P_x - \cancel{C_x}) = 16 - \cancel{2C_x} \\ -2(P_z - \cancel{C_z}) = \cancel{2C_z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_x = 8 \\ P_z = 0 \end{cases}$$

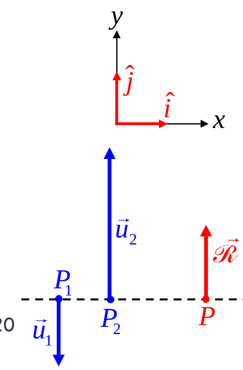
- Le componenti del centro di riduzione C si semplificano, come ci aspettavamo, in quanto non debbono influire sul risultato.



Esercizio 5 (V)

- Il **vettore applicato equivalente** dunque **esiste**. Vettore e punto di applicazione sono dati da:

  $$\begin{cases} \vec{\mathscr{R}} = 2\hat{\jmath} \\ P = (8, 0, P_z), \quad P_z \in \mathbb{R} \end{cases}$$



Esercizio 6

- Dati i due vettori:

  $\vec{u}_1 = -2\hat{j}$

  $\vec{u}_2 = 2\hat{j}$

  applicati rispettivamente nei punti:

  $P_1(-2,0,0)$

  $P_2(3,0,0)$

- Trovare, se esiste, un vettore applicato equivalente ai due e il suo punto di applicazione.

Esercizio 6 (II)

- Per calcolare i momenti occorre un centro di riduzione, anche se il risultato deve risultare indipendente dalla scelta di tale centro di riduzione. Scegliamo perciò, come centro di riduzione, il punto generico:

  $C(C_x, C_y, C_z)$

- La risultante si scrive:

  $\vec{\mathscr{R}} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 = -2\hat{j} + 2\hat{j} = \vec{0}$

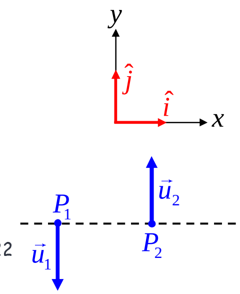
- Il momento risultante si scrive:

  $\vec{\mathscr{M}}_{(C)} = (P_1 - C)\wedge\vec{u}_1 + (P_2 - C)\wedge\vec{u}_2$

- Si ha:

  $P_1 - C = (-2 - C_x)\hat{\imath} - C_y\hat{j} - C_z\hat{k}$

  $P_2 - C = (3 - C_x)\hat{\imath} - C_y\hat{j} - C_z\hat{k}$



Esercizio 6 (III)

- Dunque:

$$(P_1 - C)\wedge\vec{u}_1 = \left[(-2 - C_x)\hat{\imath} - \cancel{C_y\hat{j}} - C_z\hat{k}\right]\wedge(-2\hat{j}) = 2(2 + C_x)\hat{k} - 2C_z\hat{\imath}$$

$$(P_2 - C)\wedge\vec{u}_2 = \left[(3 - C_x)\hat{\imath} - \cancel{C_y\hat{j}} - C_z\hat{k}\right]\wedge 2\hat{j} = 2(3 - C_x)\hat{k} + 2C_z\hat{\imath}$$

$$\vec{\mathscr{M}}_{(C)} = (P_1 - C)\wedge\vec{u}_1 + (P_2 - C)\wedge\vec{u}_2 =$$

$$= 2(2 + \cancel{C_x})\hat{k} - \cancel{2C_z\hat{\imath}} + 2(3 - \cancel{C_x})\hat{k} + \cancel{2C_z\hat{\imath}} =$$

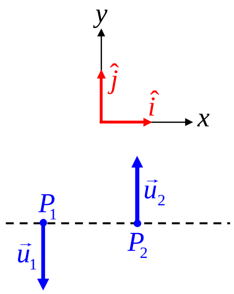
$$= 10\hat{k}$$

- Cerchiamo ora un punto di applicazione:

  $P(P_x, P_y, P_z)$

  tale che:

  $(P - C)\wedge\vec{\mathscr{R}} = \vec{\mathscr{M}}_{(C)} = (P_1 - C)\wedge\vec{u}_1 + (P_2 - C)\wedge\vec{u}_2$



Esercizio 6 (IV)

- Avremo:

  $(P - C)\wedge\vec{\mathscr{R}} = \vec{\mathscr{M}}_{(C)} = (P_1 - C)\wedge\vec{u}_1 + (P_2 - C)\wedge\vec{u}_2$

  $\left[(P_x - C_x)\hat{\imath} + (P_y - C_y)\hat{j} + (P_z - C_z)\hat{k}\right]\wedge\vec{0} = 10\hat{k}$

  $\vec{0} = 10\hat{k}$

- Poiché $\hat{k}$ è un versore, esso non può essere nullo, per cui l'uguaglianza non sarà mai verificata.
- Ne concludiamo che **non esiste** un punto di applicazione:

  $P(P_x, P_y, P_z)$

  tale che:

  $(P - C)\wedge\vec{\mathscr{R}} = \vec{\mathscr{M}}_{(C)} = (P_1 - C)\wedge\vec{u}_1 + (P_2 - C)\wedge\vec{u}_2$

- Dunque **non esiste un vettore applicato equivalente ai due vettori dati**.