Esercizi di Calcolo Vettoriale

Esercitazioni di Fisica LA per ingegneri - A.A. 2004-2005
indirizzo e-mail: alessandro.tronconi@bo.infn.it
indirizzo internet per la didattica: https://ishtar.df.unibo.it/

Esercizio 4

Dati i vettori $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ con $|\vec{v}_1| = 2$ e $|\vec{v}_2| = 3$, determinare $|\vec{v}_3|$ in modo che $\vec{v}_1+\vec{v}_2+\vec{v}_3 = 0$ essendo $\theta = 60°$ l'angolo fra $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$. Calcolare inoltre l'angolo fra $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_3$ e quello fra $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$. (R: $\sqrt{19}$, 143.41°, 156.59°)

Soluzione

Si espliciti

$$\vec{v}_3 = -(\vec{v}_1 + \vec{v}_2)$$

e si consideri il modulo dei due membri:

$$|\vec{v}_3| = |\vec{v}_1| + |\vec{v}_2| + 2|\vec{v}_1||\vec{v}_2| \cos\theta.$$

A lato destro ci sono quantità note quindi $|\vec{v}_3|$ risulta determinato. Per determinare l'angolo fra $\vec{v}_3$ e gli altri due vettori si esprima il modulo quadro di $\vec{v}_3$:

$$|\vec{v}_3|^2 = \vec{v}_3 \cdot \vec{v}_3 = -\vec{v}_3 \cdot (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = -|\vec{v}_3||\vec{v}_1| \cos\theta_{13} - |\vec{v}_3||\vec{v}_2| \cos\theta_{23}.$$

Se si tiene conto che $\theta + \theta_{13} + \theta_{23} = 2\pi$ allora l'equazione sopra contiene, in pratica, una sola incognita (o θ_{13} o θ_{23}). Essa è quindi risolvibile per entrambi gli angoli e dà il risultato cercato.

Esercizio 5

Siano dati i due vettori $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ di modulo rispettivamente 5 e 3 e formanti un angolo di $\pi/3\, rad$. Determinare le caratteristiche necessarie ad un versore $\vec{v}_3$ in modo che sia complanare ai due vettori dati e che

- $(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) \cdot \vec{v}_3 = 0$
- $(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) \wedge \vec{v}_3 = \vec{0}$

Soluzione 2

Affinchè il prodotto vettoriale fra due vettori sia nullo (se entrambi i vettori non sono banalmente nulli) è necessario che il seno dell'angolo fra di essi compreso sia zero, ovvero che essi formino angoli di $k\pi$. Quindi:

$$\vec{v}_3 = \pm \frac{\vec{v}_1 + \vec{v}_2}{|\vec{v}_1 + \vec{v}_2|}$$

Esercizio 6

Determinare l'angolo fra i il vettore $\vec{a} = \alpha(6\hat{\imath} - 3\hat{\jmath})$ e $\vec{b} = \vec{a} + \hat{\imath}$. Quanto vale il suddetto angolo nel limite $\alpha \to \infty$?

Soluzione

Il prodotto scalare fra i due vettori espressi in forma cartesiana lo esprimiamo in due modi equivalenti:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\theta = a_x b_x + a_y b_y = 6\alpha(6\alpha + 1) + (3\alpha)^2 = 45\alpha^2 + 6\alpha.$$

Essendo

$$|a| = \sqrt{45\alpha^2}, \quad |b| = \sqrt{(6\alpha + 1)^2 + 9\alpha^2} = \sqrt{45\alpha^2 + 12\alpha + 1}$$

allora

$$\cos\theta = \frac{45\alpha^2 + 6\alpha}{\sqrt{45\alpha^2}\sqrt{45\alpha^2 + 12\alpha + 1}}$$

mentre nel limite $\alpha \to \infty$

$$\cos\theta = 1.$$

L'angolo si ottiene banalmente invertendo le relazioni scritte sopra.

Esercizio 7

Siano dati due vettori uguali in modulo $\vec{a}$ e $\vec{b}$, determinare il modulo e l'angolo fra essi compreso sapendo che il loro prodotto vettoriale ha modulo 16 e la loro somma ha modulo 4. (R: $a = b = 2\sqrt{5}$, $\theta = \arccos[-3/5]$)

Esercizio 8

Dato il campo vettoriale $\vec{F}(x,y) = 2xy\hat{\imath} + 3y^2\hat{\jmath}$ definito sul piano xy determinare $\partial\vec{F}/\partial x$, $\partial\vec{F}/\partial y$. Sia poi data la curva di equazione $y = x^2$ calcolare l'integrale curvilineo su di essa

$$\int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot \vec{dl}$$

in cui $P_1 : (0,0)$, $P_2 : (1,1)$ e $\vec{dl} \equiv dx\hat{\imath} + dy\hat{\jmath}$.