Prova Scritta 22 Luglio 2011

Compito 1

---

1) Sono dati due vettori uguali in modulo $\vec{a}$ e $\vec{b}$ e formanti un certo angolo θ_{ab}. Calcolare $m = \|\vec{a}\| = \|\vec{b}\|$ sapendo che il modulo della loro somma vale 8 e che il modulo del loro prodotto vettoriale vale 3.

Soluzione

Risolviamo il problema in generale con $8 \rightarrow \sqrt{2\alpha^2}$ e $3 \rightarrow \beta$. Allora sarà:

$$\|\vec{a} + \vec{b}\|^2 = 2m^2 + 2m^2 \cos\theta_{ab} = 2\alpha^2 \ ,$$

$$\|\vec{a} \wedge \vec{b}\| = m^2 \sin\theta_{ab} = \beta \ .$$

La prima equazione si può riscrivere come: $m^2 \cos\theta_{ab} = \alpha^2 - m^2$. Elevando al quadrato entrambi i membri delle due equazioni ottenute e sommando membro a membro si avrà: $m^4 \cos\theta_{ab}^2 + m^4 \sin\theta_{ab}^2 = \left(\alpha^2 - m^2\right)^2 + \beta^2$. Il primo membro si semplifica tenendo conto che $\cos\theta^2 + \sin\theta^2 = 1$ e l'equazione diventa:

$$m^4 = \alpha^4 + m^4 - 2\alpha^2 m^2 + \beta^2 \Rightarrow m^2 = \frac{\beta^2 + \alpha^4}{2\alpha^2} \Rightarrow m = \sqrt{\frac{\beta^2 + \alpha^4}{2\alpha^2}} \ .$$

Nel caso in questione: $8 = \sqrt{2\alpha^2} \rightarrow \alpha^2 = 32$ e $\beta = 3$ quindi:

$$m = \sqrt{\frac{9 + (32)^2}{32}} \simeq 5.68 \ .$$

---

2) Una moto si muove di moto uniforme in un circuito circolare con una velocità istantanea pari a $v = 120\, km/h$. Sapendo che il modulo dell'accelerazione della moto è $\|\vec{a}\| = 2\, m/s^2$ determinare il tempo che la moto impiega per compiere un giro completo del circuito. Esprimere il risultato in secondi.

Soluzione

Il moto è circolare uniforme quindi l'accelerazione è solo centripeta. Quindi vale la relazione $\|\vec{a}\| = \dfrac{v^2}{R}$ essendo R il raggio della traiettoria. Il tempo impiegato a percorrere un giro a velocità costante (in modulo) sarà:

$$T=\frac{2\pi R}{v}=\frac{2\pi v^2}{v\|\vec{a}\|}=\frac{2\pi v}{\|\vec{a}\|}=\frac{2\pi\frac{120}{3.6}m/s}{2\,m/s^2}\simeq 104.72\,s\ .$$

---

3) La legge oraria di un punto materiale è data da $s(t)=3b\,t^2$. Determinare $v(1\,s)$ essendo sapendo che l'accelerazione vale $12\,m/s^2$.

Soluzione

La legge oraria è quella di un moto uniformemente accelerato e quindi:

$$v(t)=6bt\ ,\quad a=6b=12\,m/s^2 \Rightarrow b=2\,m/s^2\ .$$

Infine $v(1\,s)=6b(1\,s)=6\cdot 2\,\frac{m}{s^2}\cdot 1\,s=12\,m/s$.

---

4) Un punto materiale viene lanciato da terra, verticalmente, con una velocità. in modulo, pari a v_0 . Sapendo che tutti gli attriti sono trascurabili e che il punto raggiunge la quota massima $h_M=30\,m$ determinare v_0 . Esprimere il risultato in chilometri all'ora (km/h).

Soluzione

L'energia meccanica totale del punto si conserva durante il moto poiché gli attriti sono trascurabili. Dunque:

$$\frac{1}{2}mv_i^2+mgh_i=\frac{1}{2}mv_f^2+mgh_f\ .$$

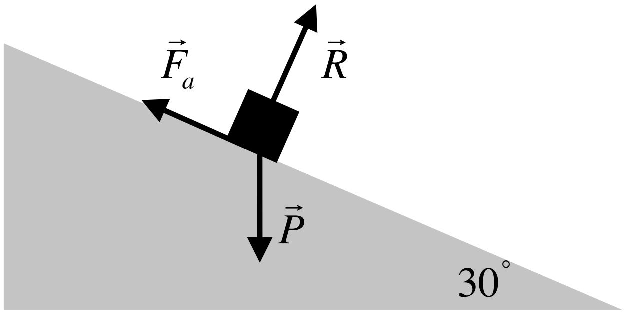
Ma, all'istante iniziale il corpo è lanciato da terra ($h_i=0$) e nel punto di quota massima la velocità è nulla ($v_f=0$) quindi:

$$\frac{1}{2}mv_i^2=mgh_f \Rightarrow v_i^2=2gh_f \Rightarrow v_i=\sqrt{2gh_f}\simeq 24.26\,m/s\simeq 87.34\,km/h\ .$$

---

5) Un corpo puntiforme di massa $M=2\,kg$ é appoggiato ad un piano inclinato di 30° rispetto al suolo. A causa degli attriti il corpo è fermo , in condizioni di equilibrio statico. Determinare la reazione vincolare del piano inclinato. Esprimere il risultato in newton (N).

Soluzione



Le tre forze in gioco (vedi figura) sono la forza peso $\vec{P}$, la reazione vincolare del piano inclinato $\vec{R}$ e la forza di attrito statico $\vec{F}_a$. La loro risultante è nulla poiché, per ipotesi, il sistema è in equilibrio statico. Nella direzione di $\vec{R}$ la condizione di equilibrio sarà dunque:

$$R - mg\cos 30^{\circ} = 0 \Rightarrow R = 2kg \cdot 9.81\frac{m}{s^2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \simeq 16.99\ N\ .$$

Costanti: $g = 9.81\, m/s^2$, $\gamma = 6.67\cdot 10^{-11} N\, m^2\, kg^{-2}$, $M_T = 5.971\cdot 10^{24}\ kg$, $R_T = 6.37\cdot 10^{6}\ m$, $M_L = 7.35\cdot 10^{22}\ kg$, $R_L = 1738\ km$.
