Prova Scritta 4 Dicembre 2009

Compito 1

---

1) Dati due versori $\hat{a}$ e $\hat{b}$ che formano un angolo θ_{ab} calcolare tale angolo sapendo che il prodotto scalare dei due vettori $\vec{v}_1 = 2\hat{a} - \hat{b}$ e $\vec{v}_2 = \hat{a} - 3\hat{b}$ è nullo.

Soluzione

Determiniamo formalmente il prodotto scalare: $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = (2\hat{a} - \hat{b}) \cdot (\hat{a} - 3\hat{b}) = 2 + 3 - 7\hat{a} \cdot \hat{b}$. Quindi l'equazione risolvente sarà $5 - 7\cos\theta_{ab} = 0 \Rightarrow \cos\theta_{ab} = 5/7 \Rightarrow \theta_{ab} \simeq 44^\circ$.

---

2) Due auto corrono sul un circuito lungo $4\ Km$. La prima si muove con velocità pari a $100\ Km/h$ e doppia la seconda dopo 10 giri. Si calcoli la velocità della seconda auto in m/s.

Soluzione

Quando la prima auto compie 10 giri la seconda è doppiata quindi ne avrà compiuti 9. Perciò per la prima auto vale che $v_1\, \Delta t = 40\ Km$ mentre per la seconda $v_2\, \Delta t = 36\ Km$. Dividendo membro a membro si ottiene: $\frac{v_1}{v_2} = \frac{40\ Km}{36\ Km} = \frac{10}{9} \Rightarrow v_2 = \frac{9}{10} v_1 = 90\ Km/h$. Passando in m/s si ottiene $v_2 = 90 \frac{1000}{3600} m/s = 25\ m/s$.

---

3) La legge oraria di un punto materiale è data da $s(t) = a\,t^4 - 2b\,t + 3c$. Si determinino a, b, c sapendo che

$s(0\,s) = 1\,m$, $v(0\,s) = 3\,m/s$ e che la velocità media dopo i primi $10\,s$ è $v_m = 2\,m/s$.

Soluzione

All'istante $t = 0\,s$ deve essere $s(0\,s) = 3c = 1\,m \Rightarrow c = \frac{1}{3}m$. Si determina poi la velocità istantanea $v(t) = \frac{ds}{dt} = 4at^3 - 2b$. All'istante $t = 0\,s$ deve essere $v(0\,s) = -2b = 3\,m/s \Rightarrow b = -\frac{3}{2}m/s$. Calcoliamo infine la velocità media dopo $10\,s$:

$$v_m = \frac{s(10\,s) - s(0\,s)}{10\,s} = \frac{a\cdot(10\,s)^4 - 2b\cdot(10\,s) + 3c - 3c}{10\,s} = a\cdot(10\,s)^3 + 3\,m/s.$$

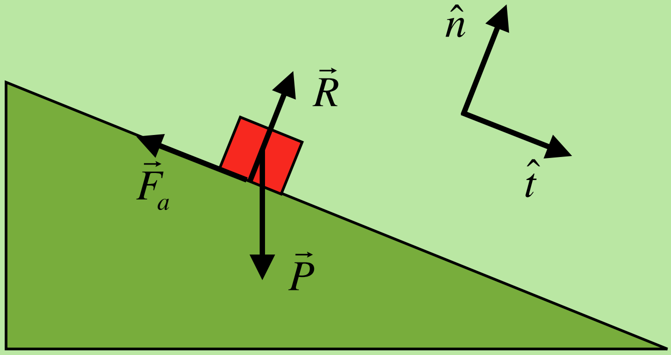
Questa velocità media deve essere $2\,m/s$ quindi:

$$a\cdot(10\,s)^3 + 3\,m/s = 2\,m/s \Rightarrow a = -10^{-3}\,m/s^4.$$

---

4) Un corpo si trova su un piano inclinato rispetto al suolo di un angolo $\alpha = 30^\circ$, in presenza di attrito radente dinamico. Il corpo scende verso il suolo con velocità costante; determinare il coefficiente di attrito dinamico μ.

Soluzione



Le forze agenti sul corpo sono la forza peso $\vec{P}$, la forza d'attrito dinamico $\vec{F}_a$ e la reazione vincolare del piano $\vec{R}$. Il corpo si muove con velocità costante quindi per il primo principio della dinamica la risultante di queste tre forze deve essere nulla $\vec{P}+\vec{F}_a+\vec{R}=0$. Se esprimiamo quest'ultima relazione in funzione dei versori $\left(\hat{n},\hat{t}\right)$ otteniamo: $-F_a\,\hat{t}+R\,\hat{n}+mg\sin\alpha\,\hat{t}-mg\cos\alpha\,\hat{n}=0$. Per componenti:

$$\begin{cases} -F_a+mg\sin 30^\circ=0 \\ R-mg\cos 30^\circ=0 \end{cases} \Rightarrow R=\frac{\sqrt{3}}{2}mg\,,\mu=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

---

5) Un satellite ruota su un'orbita circolare intorno alla terra ad una quota $h_0=1000\,Km$. Si calcoli il modulo della sua velocità $\left\|\vec{v}_0\right\|$ in m/s.

Soluzione

Rispetto ad un sistema di riferimento con centro al centro della terra il vettore posizione del satellite è $\vec{r}=r\,\hat{i}_r$. Il moto del satellite è circolare ed il satellite è soggetto alla sola forza di attrazione gravitazionale $\vec{F}=-\gamma\frac{m_s M_T}{R^2}\hat{i}_r$ dove R è il raggio dell'orbita.

Ovviamente sarà $R = R_T + h_0$. L'accelerazione del satellite è solo centripeta $\vec{a} = -\frac{\|\vec{v}_0\|^2}{R}\hat{i}_r$. Scriviamo la $\vec{F} = m_s\vec{a}$:

$$-\gamma \frac{m_s M_T}{R^2}\hat{i}_r = -m_s \frac{\|\vec{v}_0\|^2}{R}\hat{i}_r \Rightarrow \gamma \frac{m_s M_T}{R^2} = m_s \frac{\|\vec{v}_0\|^2}{R}$$

quindi $\|\vec{v}_0\| = \sqrt{\gamma \frac{M_T}{R_T + h_0}} = 7351\, m/s$.

<u>*Costanti*</u>: $g = 9.81\, m/s^2$, $\gamma = 6.67 \cdot 10^{-11}\, N\, m^2\, Kg^{-2}$, $M_T = 5.971 \cdot 10^{24}\, Kg$, $R_T = 6.37 \cdot 10^6\, m$, $M_L = 7.35 \cdot 10^{22}\, Kg$, $R_L = 1738\, Km$.

Prova Scritta 4 Dicembre 2009

Compito 2

1) Dati due versori $\hat{a}$ e $\hat{b}$ che formano un angolo θ_{ab} calcolare tale angolo sapendo che il prodotto scalare dei due vettori $\vec{v}_1 = 4\hat{a} - \hat{b}$ e $\vec{v}_2 = 2\hat{a} - 3\hat{b}$ è nullo.

Soluzione

Determiniamo formalmente il prodotto scalare: $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = (4\hat{a} - \hat{b}) \cdot (2\hat{a} - 3\hat{b}) = 8 + 3 - 14\hat{a} \cdot \hat{b}$. Quindi l'equazione risolvente sarà $11 - 14\cos\theta_{ab} = 0 \Rightarrow \cos\theta_{ab} = 11/14 \Rightarrow \theta_{ab} \simeq 38^\circ$.

2) Due auto corrono su una strada rettilinea. La prima auto parte con $\Delta t = 5\,\text{min}$ di ritardo rispetto alla seconda ma si muove con velocità doppia e la raggiunge dopo $20\,Km$. Si calcoli la velocità delle due auto in m/s.

Soluzione

Per la prima auto vale $v_1 \Delta t_1 = 20\,Km$ e per la seconda $v_2\left(\Delta t_1 + \Delta t\right) = 20\,Km$. Dalla prima relazione $\Delta t_1 = \frac{20\,Km}{v_1} = \frac{20\,Km}{2v_2}$ che, sostituita nella seconda ($\Delta t = 5\,\text{min} = \frac{1}{12}h$), darà:

$$v_2\left(\frac{10\,Km}{v_2} + \frac{1}{12}h\right) = 20\,Km \Rightarrow v_2 = 120\,Km/h.$$

Quindi $v_1 \simeq 66\,m/s$ e $v_2 \simeq 33\,m/s$.

1) La legge oraria di un punto materiale è data da $s(t) = 16at^4 - bt + 5c$. Si determinino a , b , c sapendo che $s(0\,s) = 0\,m$, $v(0\,s) = 3\,m/s$ e che la velocità media dopo i primi $10\,s$ è $v_m = 2\,m/s$.

Soluzione

All'istante $t = 0\,s$ deve essere $s(0\,s) = 5c = 0\,m \Rightarrow c = 0\,m$. Si determina poi la velocità istantanea $v(t) = \frac{ds}{dt} = 64at^3 - b$. All'istante $t = 0\,s$ deve essere $v(0\,s) = -b = 3\,m/s \Rightarrow b = -3\,m/s$. Calcoliamo infine la velocità media dopo $10\,s$:

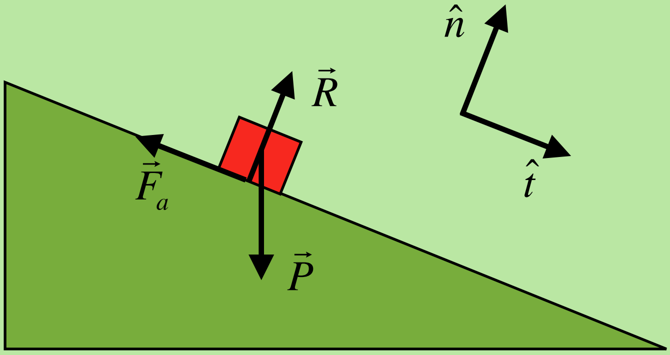
$$v_m = \frac{s(10\,s) - s(0\,s)}{10\,s} = \frac{16\,a \cdot (10\,s)^4 - b \cdot (10\,s)}{10\,s} = 16\,a \cdot (10\,s)^3 + 3\,m/s.$$

Questa velocità media deve essere $2\,m/s$ quindi:

$$16\,a \cdot (10\,s)^3 + 3\,m/s = 2\,m/s \Rightarrow a = -\frac{1}{16} 10^{-3}\,m/s^4.$$

2) Un corpo si trova su un piano inclinato rispetto al suolo di un angolo $\alpha = 45^\circ$, in presenza di attrito radente statico. Il corpo è fermo; determinare il coefficiente di attrito statico f minimo che ammette questa condizione per il corpo.

Soluzione



Le forze agenti sul corpo sono la forza peso $\vec{P}$, la forza d'attrito statico $\vec{F}_a^{(s)}$ e la reazione vincolare del piano $\vec{R}$. Il corpo è fermo quindi per il primo principio della dinamica la risultante di queste tre forze deve essere nulla $\vec{P}+\vec{F}_a^{(s)}+\vec{R}=0$. Se esprimiamo quest'ultima relazione in funzione dei versori $(\hat{n},\hat{t})$ otteniamo: $-F_a^{(s)}\,\hat{t}+R\,\hat{n}+mg\sin\alpha\,\hat{t}-mg\cos\alpha\,\hat{n}=0$. Per componenti:

$$\begin{cases} -F_a + mg\sin 45^\circ = 0 \\ R - mg\cos 45^\circ = 0 \end{cases} \Rightarrow R=\frac{\sqrt{2}}{2}mg\,, f=1\,.$$

---

3) Un satellite ruota su un'orbita circolare intorno alla luna ad una quota $h_0 = 50\,Km$. Si calcoli il modulo della sua velocità $\|\vec{v}_0\|$.

Soluzione

Rispetto ad un sistema di riferimento con centro al centro della luna il vettore posizione del satellite è $\vec{r}=r\,\hat{i}_r$. Il moto del satellite è circolare ed il satellite è soggetto alla sola forza di attrazione gravitazionale $\vec{F}=-\gamma\frac{m_s M_L}{R^2}\hat{i}_r$ dove R è il raggio dell'orbita.

Ovviamente sarà $R = R_L + h_0$. L'accelerazione del satellite è solo centripeta $\vec{a} = -\frac{\|\vec{v}_0\|^2}{R}\hat{i}_r$. Scriviamo la $\vec{F} = m_s\vec{a}$:

$$-\gamma\frac{m_s M_L}{R^2}\hat{i}_r = -m_s\frac{\|\vec{v}_0\|^2}{R}\hat{i}_r \Rightarrow \gamma\frac{m_s M_L}{R^2} = m_s\frac{\|\vec{v}_0\|^2}{R}$$

quindi $\|\vec{v}_0\| = \sqrt{\gamma\frac{M_L}{R_L + h_0}} = 1656\, m/s$.

Costanti: $g = 9.81\, m/s^2$, $\gamma = 6.67 \cdot 10^{-11}\, N\, m^2\, Kg^{-2}$, $M_T = 5.971 \cdot 10^{24}\, Kg$, $R_T = 6.37 \cdot 10^6\, m$, $M_L = 7.35 \cdot 10^{22}\, Kg$, $R_L = 1738\, Km$.
