Soluzione

Il moto, per ipotesi, è circolare (non uniforme). Il punto materiale è vincolato dal cavo inestensibile a muoversi su una circonferenza di raggio R. In generale la sua accelerazione è della forma

$$\vec{a} = \ddot{s}\vec{t} - \frac{\dot{s}^2}{R}\vec{n}$$

essendo $\vec{t}, \vec{n}$ la baase di vettori illustrata in figura. Tale accelerazione è legata dalla seconda legge della dinamica alle forze in gioco $\vec{T} = -T\vec{n}$ (tensione del cavo) e $\vec{V} = -V\vec{t} = -\mu mg\vec{t}$ (forza di attrito dinamico):

$$-T\vec{n} - V\vec{t} = m(\ddot{s}\vec{t} - \frac{\dot{s}^2}{R}\vec{n})$$

che proiettata sulla base scelta dà due equazioni:

$$m\ddot{s} = -\mu mg$$

$$m\frac{\dot{s}^2}{R} = T.$$

La prima equazioni descrive un moto uniformemente decellerato (il moto sulla traiettoria rettificata è infatti tale), la seconda dà la tensione del cavo in funzione della velocità. Attenzione: diversamente da un moto decellerato come quello di un proiettile, in questo caso ci sono delle condizioni da aggiungere: il corpo (diversamente da un proiettile) terminata la fase di decellerazione si ferma definitivamente perchè la forza di attrito $\vec{V}$ si spegne quando il corpo è fermo. Integriamo la prima equazione:

$$s(t) = v_0 t - \frac{1}{2}\mu g t^2$$

$$v(t) = v_0 - \mu g t;$$

il corpo si ferma all'istante t^* tale che $v_0 - \mu g t^* = 0$ ovvero a $t^* = \frac{v_0}{\mu g}$. A quell'istante il numero di giri compiuto è:

$$numero\ giri = \frac{v_0 t^* - \frac{1}{2}\mu g (t^*)^2}{2\pi R}.$$

All'istante $\tilde{t}$ in cui ripassa per la prima volta dal punto di lancio vale

$$s(\tilde{t}) = 2\pi R$$

che una volta risolta mi da $\tilde{t}$. Attenzione: questa equazione è di secondo grado quindi ha due soluzioni. Solo la soluzione con $\tilde{t}$ più piccolo è fisicamente rilevante perchè la seconda si riferisce ad un moto in cui il corpo decellera, si ferma e torna indietro (situazione che non si verifica per la natura delle forze in gioco). Noto $\tilde{t}$ l'accelerazione richiesta è semplicemente:

$$\vec{a}(\tilde{t}) = \ddot{s}(\tilde{t})\vec{t} - \frac{\dot{s}(\tilde{t})^2}{R}\vec{n}$$

dove lascio al lettore il compito di sostituire le espressioni per $\ddot{s}$ e $\dot{s}$ all'istante $\tilde{t}$.

Soluzione

Inizialmente il corpo è in quiete. Si verifica che la molla è allungata e la condizione di equilibrio è:

$$\vec{P} + \vec{K} = 0$$

che proiettata lungo $\vec{k}$ è

$$-mg + k\Delta l = -mg + k(z_R - 0)$$

essendo Δl il modulo della deformazione della molla e z_R la quota del punto calcolata rispetto ad O quando la molla è nella sua posizione di equilibrio. Risolvendo l'equazione sopra si ottiene

$$z_R = \frac{mg}{k}.$$

Ora consideriamo il caso in cui il punto si muove. Le forze in gioco sono le stesse ma in generale l'accelerazione è diversa da zero quindi

$$\vec{P} + \vec{K} = m\vec{a}$$

proiettata lungo $\vec{k}$:

$$m\ddot{z} = -mg + k(z_R - z)$$

sostituendo z_R si verifica che l'equazione è semplicemente

$$m\ddot{z} = -kz$$

che ha come soluzione generale

$$z(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t;$$

A, B sono legate alle condizioni iniziali del moto ed $\omega = \sqrt{k/m}$; il periodo del moto è $T = \frac{2\pi}{\omega}$ e fissando le condizioni iniziali a $t = 0$ si verifica che $A = 0$ e $B = v_0/\omega$.

Soluzione

Per la terza legge di Keplero vale

$$\frac{T_1^2}{r_1^3} = \frac{T_2^2}{\left(\frac{r_{min}+r_{max}}{2}\right)^3}$$

da cui si ricava T_2.
Il pianeta m_1 si muove su un orbita circolare di moto circolare uniforme (per la seconda legge di Keplero deve avere velocità areolare costante e, per un moto circolare, ciò è equivalente ad avere una velocità costante!) quindi ha solo un'accelerazione centripeta. Per il secondo principio della dinamica e trascurando le interazioni fra m_1 ed m_2

$$\vec{F}_1 = m_1\vec{a}_1$$

con $\vec{F}_1$ dato dalla forza di attrazione fra M ed m_1 che in modulo è $F_1 = G\frac{mM}{r_1^2}$ ed è diretta in modo centripeto. D'altro canto a_1 è un'accelerazione centripeta viste le caratteristiche del moto quindi proiettando lungo la direzione radiale la seconda legge della dinamica:

$$G\frac{mM}{r_1^2} = m\omega_1^2 r_1$$

in cui ω_1 è la velocità angolare ed è, per un moto circolare uniforme, $\omega_1 = 2\pi/T_1$. Quindi posso finalmente ricavare M dall'ultima equazione (dopo aver sostituito la definizione di ω_1) per ottenere:

$$M = \frac{4\pi^2 r_1^3}{G T_1^2}.$$