Fisica Generale L-A

2. Esercizi di Cinematica

http://ishtar.df.unibo.it/Uni/bo/ingegneria/all/galli/stuff/trasparenze/AE02-Cinematica.pdf

17/01/2005

Esercizio 1

- Un punto materiale è vincolato a muoversi lungo una guida rettilinea.
- Al tempo $t = 0$ il punto materiale si trova in quiete.
- Il punto materiale accelera con accelerazione:

$$a(t) = kt^2, \quad \text{con} \quad k = \frac{\xi + 1}{1000}\,\mathrm{m/s^4}$$

- Trovare la velocità istantanea raggiunta e lo spazio percorso dopo:

$$\frac{2\xi + 1}{100}\,\mathrm{s}$$

- $\xi = 775$.

Esercizio 1 (II)

- La velocità raggiunta si trova integrando l'accelerazione:

$$v(t) = \int_0^t a(t')\,dt' = \int_0^t kt'^2\,dt' = \left[k\frac{t'^3}{3}\right]_0^t = k\frac{t^3}{3}$$

- Lo spazio percorso si trova integrando la velocità:

$$s(t) = \int_0^t v(t')\,dt' = \int_0^t k\frac{t'^3}{3}\,dt' = \left[k\frac{t'^4}{12}\right]_0^t = k\frac{t^4}{12}$$

- Nel nostro caso:

$$k = \frac{\xi + 1}{1000}\,\mathrm{m/s^4} = \frac{775 + 1}{1000}\,\mathrm{m/s^4} = 0.776\,\mathrm{m/s^4}$$

$$t = \frac{2\xi + 1}{100}\,\mathrm{s} = \frac{2 \times 775 + 1}{100}\,\mathrm{s} = 15.51\,\mathrm{s}$$

Esercizio 1 (III)

- Da cui:

$$v = k\frac{t^3}{3} = 0.776\frac{15.51^3}{3} = 965\,\mathrm{m/s}$$

$$s = k\frac{t^4}{12} = 0.776\frac{15.51^4}{12} = 3740\,\mathrm{m}$$

Esercizio 2

- Un punto materiale è vincolato a una guida circolare di raggio $r = 3\ \mathrm{m}$, su cui può scorrere senza attrito.
- Esso si muove secondo la legge oraria

$$s(t) = kt^3$$

con

$$k = \frac{\xi + 1}{200}\,\mathrm{m/s^3}$$

- Calcolare la componente tangenziale e la componente normale dell'accelerazione dopo $1\ \mathrm{s}$.
- $\xi = 384$.

Esercizio 2 (II)

- Le componenti tangenziale e normale dell'accelerazione si scrivono:

$$\begin{cases} a_t = \ddot{s} \\ a_n = \dfrac{\dot{s}^2}{r} \end{cases}$$

- Troviamo le derivate di s:

$$s(t) = kt^3$$
$$\dot{s}(t) = 3kt^2$$
$$\ddot{s}(t) = 6kt$$

- Nel nostro caso:

$$k = \frac{\xi + 1}{200}\,\mathrm{m/s^3} = 1.925\,\mathrm{m/s^3}$$

Esercizio 2 (III)

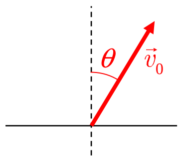
- Avremo perciò:

$$\begin{cases} a_t(t) = \ddot{s}(t) = 6kt \\ a_n(t) = \dfrac{\dot{s}^2(t)}{r} = \dfrac{9k^2t^4}{r} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_t(t) = 6 \times 1.925 \times 1 = 11.6\,\mathrm{m/s^2} \\ a_n(t) = \dfrac{9 \times 1.925^2 \times 1^4}{3} = 11.1\,\mathrm{m/s^2} \end{cases}$$

Esercizio 3

- Un punto materiale viene lanciato dalla superficie terrestre con velocità $v_0 = 100\ \mathrm{m/s}$, a un angolo di $\theta = \frac{9}{100}\xi°$ rispetto alla verticale.
- Calcolare il raggio di curvatura del punto materiale subito dopo il lancio.
- $\xi = 239$.

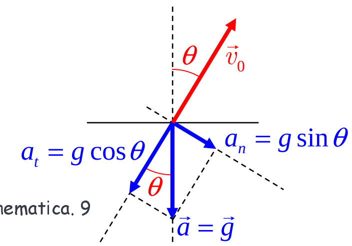


Esercizio 3 (II)

- Come per tutti i corpi liberi in prossimità della superficie terrestre, l'accelerazione ha modulo $g = 9.81\ \mathrm{m/s^2}$ ed è diretta lungo la verticale, verso il centro della terra (vedi figura).
- L'accelerazione si può pertanto scomporre in due componenti ortogonali: la componente tangenziale a_t, con la stessa direzione della velocità e la componente normale a_n, con direzione perpendicolare alla velocità.
- La componente normale è legata al raggio di curvatura dalla relazione:

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

- Conoscendo a_n si può quindi calcolare il raggio di curvatura.



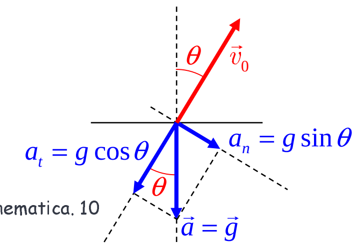
Esercizio 3 (III)

- Nel nostro caso abbiamo:

$$\theta = \tfrac{9}{100}\xi° = \tfrac{9}{100}239° = 21.51°$$

$$a_n = g\sin\theta = 9.81 \times \sin(21.51°) = 3.60\,\mathrm{m/s^2}$$

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{100 \times 100}{3.60} = 2780\,\mathrm{m}$$



Esercizio 4

- Un punto materiale si muove in un piano seguendo la legge oraria:

$$s(t) = kt^2, \quad \text{con } k = 0.25\,\mathrm{m/s^2}$$

- Trovare il raggio di curvatura della traiettoria nei due seguenti casi:
  - Il modulo dell'accelerazione è costante: $a = 2k$.
  - Il modulo dell'accelerazione cresce con il tempo, secondo la legge:

$$a(t) = 2k\sqrt{1 + \left(\frac{t}{T}\right)^4}, \quad \text{con } T = 7\,\mathrm{s}$$

Esercizio 4 (II)

- Nella sua espressione intrinseca, l'accelerazione si può scrivere come:

$$\vec{a} = \ddot{s}\hat{t} + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\hat{n}$$

- Essendo i versori $\hat{n}$ e $\hat{t}$ perpendicolari tra loro, si ha:

$$a^2 = \vec{a}\bullet\vec{a} = \left(\ddot{s}\hat{t} + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\hat{n}\right)\bullet\left(\ddot{s}\hat{t} + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\hat{n}\right) = \ddot{s}^2\underbrace{\hat{t}\bullet\hat{t}}_{1} + \frac{\dot{s}^4}{\rho^2}\underbrace{\hat{n}\bullet\hat{n}}_{1} + 2\ddot{s}\frac{\dot{s}^2}{\rho}\underbrace{\hat{n}\bullet\hat{t}}_{0} =$$

$$= \ddot{s}^2 + \frac{\dot{s}^4}{\rho^2}$$

- Da questa relazione possiamo ricavare il raggio di curvatura:

$$a^2 - \ddot{s}^2 = \frac{\dot{s}^4}{\rho^2} \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{\dot{s}^2}{\sqrt{a^2 - \ddot{s}^2}}$$

Esercizio 4 (III)

- Nel nostro esercizio, abbiamo:

$$s(t) = kt^2, \quad \text{con } k = 0.25\,\mathrm{m/s^2}$$
$$\dot{s}(t) = 2kt$$
$$\ddot{s}(t) = 2k$$
$$\rho = \frac{\dot{s}^2}{\sqrt{a^2 - \ddot{s}^2}} = \frac{4k^2t^2}{\sqrt{a^2 - 4k^2}}$$

- Nel primo caso l'accelerazione è costante ($a = 2k$) e avremo:

$$\rho = \frac{4k^2t^2}{\sqrt{a^2 - 4k^2}} \xrightarrow[a \to 2k]{} \infty$$

- Poiché raggio di curvatura è infinito, la **traiettoria** è **rettilinea**.

Esercizio 4 (IV)

- Nel secondo caso il modulo dell'accelerazione aumenta col tempo secondo la legge:

$$a(t) = 2k\sqrt{1 + \left(\frac{t}{T}\right)^4}, \quad \text{con } T = 7\,\mathrm{s}$$

- Avremo:

$$\rho = \frac{4k^2t^2}{\sqrt{a^2 - 4k^2}} = \frac{4k^2t^2}{\sqrt{4k^2\left[\cancel{1} + \left(\frac{t}{T}\right)^4\right] - \cancel{4k^2}}} = \frac{4k^{\cancel{2}}\cancel{t^2}}{2\cancel{k}\frac{\cancel{t^2}}{T^2}} = 2kT^2 \equiv \mathrm{cost}$$

- Poiché il raggio di curvatura è costante, la **traiettoria** è **circolare**.

Esercizio 4 (V)

- Il raggio di curvatura è dato da:

$$k = 0.25\,\mathrm{m/s^2}$$
$$T = 7\,\mathrm{s}$$
$$\rho = 2kT^2 = 2 \times 0.25\frac{\mathrm{m}}{\cancel{\mathrm{s}^2}}\,49\,\cancel{\mathrm{s}^2} = 24.5\,\mathrm{m}$$

Esercizio 5

- Un punto materiale si muove in un piano.
- A partire da un certo istante i moduli della velocità e dell'accelerazione diminuiscono con il tempo secondo le leggi:

$$v(t) = \frac{L}{t+T}, \quad a(t) = \frac{kL}{(t+T)^2}$$

- Trovare:
  - la legge oraria.
  - la forma della traiettoria per tutti i valori ammissibili di k.

Esercizio 5 (II)

- Troviamo innanzitutto la legge oraria:

$$\dot{s}(t) = v(t) = \frac{L}{t+T}$$

$$s(t) = \int_0^t \dot{s}(t')\,dt' = \int_0^t \frac{L}{t'+T}\,dt' = \left[L\ln(t'+T)\right]_0^t = L\ln(t+T) - L\ln T =$$

$$= L\ln\left(\frac{t+T}{T}\right) = L\ln\left(1+\frac{t}{T}\right)$$

$$s(t) = L\ln\left(1+\frac{t}{T}\right)$$

Esercizio 5 (III)

- Troviamo ora la traiettoria. Ricordiamo dall'esercizio 4 che:

$$\rho = \frac{\dot{s}^2}{\sqrt{a^2 - \ddot{s}^2}}$$

- In questo esercizio:

$$\begin{cases} \dot{s}(t) = v(t) = \dfrac{L}{t+T} \quad \Rightarrow \quad \ddot{s}(t) = \dfrac{dv}{dt} = -\dfrac{L}{(t+T)^2} \\ a(t) = \dfrac{kL}{(t+T)^2} \end{cases}$$

$$\rho = \frac{\dot{s}^2}{\sqrt{a^2 - \ddot{s}^2}} = \frac{\dfrac{L^{\cancel{2}}}{\cancel{(t+T)^2}}}{\sqrt{\dfrac{k^2 \cancel{L^2}}{\cancel{(t+T)^4}} + \dfrac{\cancel{L^2}}{\cancel{(t+T)^4}}}} = \frac{L}{\sqrt{k^2 - 1}}$$

Esercizio 5 (IV)

$$\rho = \frac{L}{\sqrt{k^2 - 1}}$$

- Come si vede, per $k \in \left]-1,1\right[\;\Rightarrow\; k^2 - 1 < 0$ il raggio di curvatura risulterebbe immaginario, per cui non si ha né una traiettoria, né un moto reale.
- Per $k = \pm 1$ si ha:

$$\rho = \frac{L}{\sqrt{k^2 - 1}} \xrightarrow[k \to \pm 1]{} \infty$$

il raggio di curvatura è infinito, e la **traiettoria** è **rettilinea**.

- Per $k \notin \left]-1,1\right[$ il raggio di curvatura è costante e finito e la **traiettoria** è **circolare**.