Esercizi di Cinematica

Esercitazioni di Fisica LA per ingegneri - A.A. 2009-2010

Esercizio 1

Data la legge oraria: $s(t) = a\,t^3 - b\,t + c$ (con $a = 3\,ms^{-3}$, $b = 2\,ms^{-1}$, $c = 1\,m$) calcolare la posizione e la velocità all'istante iniziale ($t = 0s$) ed a quale istante il punto materiale ha velocità nulla.

(*Ris:* $1\,m$, $-2\,m/s$, $0.47\,s$)

Esercizio 2

Una macchina parte, accelera uniformemente per $20\,s$ con accelerazione costante pari a $a_0 = 0.5\,m/s^2$, quindi viaggia con velocita' costante. Calcolare quanto tempo impieghi per coprire $1\,km$.

(*Ris:* $110\,s$)

Esercizio 3

Il vettore posizione in funzione del tempo di un punto materiale vincolato a muoversi su un piano è:

$$\vec{r}(t) = (At + B)\hat{\imath} + (Ct^3 - Dt^2)\hat{\jmath}$$

con $B = 3\,m$, $C = 1\,m/s^3$, $D = 2\,m/s^2$. Determinare: il valore di A sapendo che il modulo della velocità al tempo iniziale $t = 0\,s$ è pari a $v_0 = 4\,m/s$; i vettori velocità ed accelerazione all'istante $t = 10\,s$; il modulo della componente normale dell'accelerazione a $t = 0\,s$ e a $t = 1\,s$.

(*Ris:* $4\,m/s$, $56\,m/s^2$, $4\,m/s^2$, $1,94\,m/s^2$)

Esercizio 4

Considerare il moto piano: $\vec{r}(t) = ut\,\hat{\imath} + A\cos\omega t\,\hat{\jmath}$. Determinare: l'equazione della traiettoria; le ascisse dei punti corrispondenti al minimo della velocità; il raggio di curvatura in tali punti.

(*Ris:* $y = A\cos\frac{\omega\,x}{u}$, $k\frac{u\pi}{\omega}$, $\frac{u^2}{\omega^2 A}$)

Esercizio 5

Un punto materiale si muove sulla parabola $y = -Ax^2 + B$ (con $A = 2\,m^{-1}$ e $B = 50\,m$) partendo da terra ($y(0) = 0\,m$). Sapendo che il moto del punto è uniformemente decelerato con $\vec{a} = -a_0\,\hat{\jmath}$, $a_0 = 2\,m/s^2$. Calcolare la velocità iniziale del corpo.

(*Ris:* $12.5\,\hat{\imath} + 14.14\,\hat{\jmath}$)

Esercizio 6

Un punto materiale pesante di massa $m = 1.20\,kg$ è vincolato a muoversi nel piano verticale xy lungo una guida priva di attrito. All'istante iniziale si trova nel punto di coordinate $x = 0m$, $y = 1.40\,m$ con velocità nulla. La guida è tangente all'asse delle ordinate nel punto iniziale. La posizione della particella in funzione del tempo è data dall'espressione: $\vec{r}(t) = (A\omega t - A\sin\omega t)\hat{\imath} + (A + A\cos\omega t)\hat{\jmath}$. Calcolare: il valore delle costanti A e ω; la coordinata x del punto in cui la particella tocca il suolo ($y = 0\,m$), il modulo del vettore velocità in tale punto ed il tempo necessario a raggiungerlo.

(*Ris:* $0.70\,m$, $3.74\,s^{-1}$, $2.20\,m$, $5.24\,m/s$, $0.84\,s$)

Esercizio 7

Un punto materiale è vincolato a muoversi su una circonferenza di raggio $r = 1\,m$. Lo spostamento rispetto ad un'origine arbitraria scelta sulla traiettoria è $s(t) = At^2$ con $A = 5\,m \cdot s^{-2}$. Determinare a quale istante l'accelerazione forma un angolo di $\pi/4$ con la velocità.

(*Ris:* $1/\sqrt{10}\,s$)

Esercizio 8

Un'automobile viaggia alla velocità di $97\,km/h$. Il diametro delle ruote è pari a $76\,cm$. Determinare: la velocità angolare ω delle ruote, il periodo T e la frequenza ν di rotazione delle stesse, il modulo dell'accelerazione a di un punto su una ruota.

(*Ris:* $\omega = 70.9\,rad/s$, $T = 0.089\,s$, $\nu = 11.2\,Hz$, $a = 1910\,m/s^2$)

Esercizio 9

Il vettore posizione di un moto vario è $\vec{r}(t) = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath}$ con $x = a\,\cosh\omega t$ e $y = b\,\sinh\omega t$. Determinare l'equazione della traiettoria $f(x, y) = 0$.

Esercizio 10

Un aereoplano che viaggia con una velocità di $800\,km/h$ ad un certo istante vira per invertire la rotta. Sapendo che la traiettoria descritta durante la virata è quella di una semicirconferenza e che il pilota, durante la manovra, è sottoposto ad un'accelerazione di $5g$ determinare quanto impiega per completare l'inversione.

(*Ris:* $14.23\,s$)

Esercizio 11

Un punto materiale è vincolato a muoversi su una guida rettilinea che ha un estremo incernierato nell'origine di un sistema di riferimento cartesiano. Il moto del punto sulla guida (e relativamente ad essa) è uniforme (velocità costante v_n nella direzione della guida) mentre la guida ruota con velocità angolare costante ω introno all'origine. Sapendo che all'istante $t = 0$ il punto materiale si trova nell'origine e la guida è disposta sull'asse positivo delle ascisse determinare la legge oraria del punto materiale in forma cartesiana. Determinare infine l'equazione che esprime il vincolo necessario affinchè ad un certo istante la componente lungo $\hat{\jmath}$ dell'accelerazione del punto sia nulla.

Esercizio 12

Due macchine partono nello stesso istante una da Milano con velocità v_M e l'altra da Roma con velocità v_R (sia d_{MR} la distanza da Milano a Roma). Determinare il punto d'incontro delle due vetture.

(*Ris:* $\Delta s_M = \frac{v_M}{v_M+v_R} d_{MR}$)

Esercizio 13

Un treno si muove con accelerazione costante per un tratto lungo L. All'inizio la velocità ha modulo v_0. Calcolare il tempo impiegato dal treno a percorrere il tratto L ed il modulo della velocità finale.

Esercizio 14

Un ciclista procede con velocità costante v_0 e supera un motociclista fermo. quando il ciclista è arrivato ad una distanza d, il motociclista parte e lo insegue con accelerazione costante a fino a raggiungerlo. Determinare il tempo impiegato dal motociclista per raggiungere il ciclista ed il modulo della velocità del motociclista nell'istante del sorpasso.

Esercizio 15

Si determini l'equazione della traiettoria del cicloide (un punto materiale sul bordo di un disco che rotola senza strisciare con velocit angolare ω costante) e si calcoli il raggio di curvatura in corrispondenza delle posizioni con la massima distanza da terra.

Esercizi d'esame - avanzati

Esercizio 1

Un punto materiale, sul piano cartesiano, segue la traiettoria $y = Ax + B$ con $A = 5$ e $B = -2\,m$. Sapendo che la legge oraria espressa come spostamento sulla traiettoria in funzione del tempo (nel semipiano delle ascisse positive)è $s(t) = kt^2$ con $k = 2\,m/s^2$ e avendo scelto $s(0) = 0$ in corrispondenza del punto $P : (0, B)$ determinare la legge oraria in forma cartesiana.

(*Forlì 07/02/2003 - Ris:* $\vec{r}(t) = 0.392\,t^2\,\hat{\imath} + (1.961\,t^2 - 2)\hat{\jmath}$)

Esercizio 2

Un punto materiale si muove con un'accelerazione $\vec{a}(t) = A\exp(-kt)\hat{\imath} + B\hat{\jmath}$ essendo $A = -2\,m/s^2$, $k = 1\,s^{-1}$, $B = -9.8\,m/s^2$. Determinare l'equazione della traiettoria sapendo che il corpo parte con velocità $\vec{v}(0) = (2\hat{\imath})m/s$ dal punto $\vec{r}(0) = 1000\hat{\jmath}\,m$. Determinare inoltre il raggio di curvatura a $t = 0$.

(*Forlì 07/02/2003 - Ris:* $y = -4.9\,[\ln(1-0.5\,x)]^2 + 1000,\ R = 4.082\,10^{-1}m$)

Esercizio 3

Un punto materiale è vincolato a muoversi senza attrito lungo una guida rettilinea. Al tempo $t = 0$ il punto materiale si trova in quiete nell'origine scelta. Se il punto accelera con accelerazione $a(t) = kt$, dove $k = 2\,m/s^2$, trovare la velocità e lo spazio percorso in funzione del tempo.

(*Forlì 07/02/2003 - Ris:* $v(t) = t^2\,m/s,\ s(t) = 1/3\,t^3\,m$)

Esercizio 4

Un punto materiale si muove su di una traiettoria circolare di raggio $r = 2\,m$ con la legge oraria $s(t) = kt^2$, con $k = 2\,m/s^2$. Calcolare la componente tangenziale e la componente normale dell'accelerazione in funzione del tempo.

(*Forlì 07/02/2003 - Ris:* $a_t = 4\,m/s^2,\ a_n = 8t^2\,m/s^2$)

Esercizio 5

Le equazioni parametriche cartesiane del moto di un punto materiale sono: $x = k_1 - k_2\cos\omega t$, $y = k_3 + k_4\sin\omega t$, con $k_1 = 2\,m$, $k_2 = 3\,m$, $k_3 = 4\,m$, $k_4 = 5\,m$, $\omega = 10\,s^{-1}$. Determinare l'equazione della traiettoria.

(*Forlì 28/03/2003 - Ris:* $k_4^2(x-k_1)^2 + k_2^2(y-k_3)^2 = k_2^2k_4^2$)

Esercizio 6

Il moto di un punto materiale vincolato su un piano verticale xy è descritto dall'equazione $\vec{r}(t) = \{R[\cos(\alpha_0 - \omega\,t) + \omega\,t] + x_0\}\,\hat{\imath} + R[\sin(\alpha_0 - \omega\,t) + 1]\,\hat{\jmath}$ in cui $R = \sqrt{\xi}\,m$ e $\omega = \frac{10\,\pi}{\xi}\,s^{-1}$. Calcolare:

1) le costanti α_0 ed x_0 in modo che a $t = \xi/20\,s$ il punto passi per l'origine;

2) il raggio di curvatura della traiettoria nell'istante in cui è massima la distanza del punto dalla retta $y = 0\,m$.

(*Forlì 19/06/2003 - Ris:* $\alpha_0 = 2(k+1)\pi,\ x_0 = -\pi\sqrt{\xi}/2,\ r_c = 4\sqrt{xi}$)

Esercizio 7

Il moto di un punto materiale è descritto dall'equazione $y = a\,x^2$. Sapendo che il punto materiale parte da $P(-2\,m, 4a\,m)$ con una velocità, in modulo, pari a $v_0 = \frac{\xi}{100}\,m/s$ e che il raggio di curvatura della traiettoria, nel punto $x = 0$, è uguale a $R = \sqrt{\xi}\,m$ calcolare a e la componente della velocità del punto lungo x.

(*Forlì 01/07/2003 - Ris:* $a = 1/2\sqrt{\xi},\ v_x = \sqrt{\xi^3 \cdot 10^{-4}/(\xi+4)}$)

Esercizio 8

Un punto materiale viene lanciato dalla superficie terrestre con velocità $v_0 = 100\,m/s$, a un angolo di $\theta = (9\xi/100)^\circ$ rispetto alla verticale. Calcolare il raggio di curvatura del punto materiale subito dopo il lancio.

(*Forlì 19/09/2003 - Ris:* $r_c = v_0^2/[g\sin(9\xi/100)]$)

Esercizio 9

Le equazioni del moto in forma cartesiana per un proiettile sono date da $\ddot{x} = -k\dot{x}$ e $\ddot{y} = -g$ essendo $k = \xi \cdot 10^{-4}\,s^{-1}$ e g l'accelerazione di gravità. Sapendo che il proiettile parte dal suolo ($x(0) = 0\,m$ ed $y(0) = 0\,m$) con una velocità in modulo pari a $v_0 = 10\sqrt{2}\,m/s$ inclinata di 45° rispetto a terra scrivere l'equazione della traiettoria in forma implicita e determinare il raggio di curvatura della stessa nel punto di massima distanza da terra.

(*Forlì 15/12/2003 - Ris:* $y = -g/2k^2\ln^2(1 - kx/\alpha) - \alpha/k\ln(1 - kx/\alpha)$*,* $r_c = \alpha^2\exp(-2k\alpha/g)/g$)

Esercizio 10

Due automobili, partendo dalla stessa posizione, percorrono un circuito di lunghezza L con velocità costante v_1 e v_2 rispettivamente ($v_1 > v_2$). Determinare la relazione tra le velocità affinche la prima automobile doppi la seconda dopo un giro e tre quarti.

(*Bologna 11/09/2006 - Ris:* $v_1 = 7/3\,v_2$)

Esercizio 11

Un punto si muove nel piano secondo la legge oraria (in forma cartesiana) $x = \alpha t$, $y = \frac{1}{2}\beta t^2$. Esprimere, in funzione del tempo, l'angolo che l'accelerazione del punto materiale forma con la direzione del moto.

(*Bologna 21/03/2006 - Ris:* $\arccos\left(\frac{\beta t}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2t^2}}\right)$)

Esercizio 12

Un punto materiale si muove lungo una traiettoria curvilinea secondo la legge oraria $s(t) = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \beta t + \gamma$. Calcolare il raggio di curvatura della traiettoria nel punto P nell'ipotesi che il modulo dell'accelerazione in P valga a_0.

(*Bologna 19/07/2005 - Ris:* $r = \frac{(\alpha t_P+\beta)^2}{\sqrt{a_0^2-\alpha^2}}$)

Esercizio 13

Il moto di un punto materiale è descritto dalle seguenti equazioni orarie: $x(t) = (3\,m/s^2)t^2 + (2\,m/s)t + (4\,m)$, $y(t) = t + (3\,m)$, $z(t) = 0$. Calcolare l'angolo formato dai vettori velocità ed accelerazione al tempo $t = 1\,s$. (*Bologna 16/06/2009*)

Esercizio 14

Un punto materiale si muove nel piano verticale secondo le equazioni orarie $x = v_{0x}t$, $y = v_{0x}t - \frac{1}{2}g\,t^2$ con $g = 9.81\,m/s^2$. Calcolare, nella posizione di massima quota, la curvatura della traiettoria. (*Bologna 01/07/2009*)

Esercizio 15

Un punto materiale si muove su un piano orizzontale liscio con le seguenti equazioni orarie: $x(t) = A\cos\omega t$ ed $y(t) = B\sin^2\omega t$ dove A, B ed ω sono costanti positive. Determinare: 1) l'equazione della traiettoria; 2) l'espressione dei vettori velocità ed accelerazione all'istante $t = \pi/(2\omega)$; 3) il raggio di curvatura ρ della traiettoria allo stesso istante. (*Bologna 17/07/2008*)