CINEMATICA

La cinematica si occupa dello studio del moto dei corpi. In generale la cinematica si interessa semplicemente della descrizione del moto dei corpi e non del motivo per cui essi assumono le traiettorie osservate.

Il primo problema che poniamo è dunque quello di definire la posizione di un punto nello spazio. Si noti anzitutto che la posizione assoluta di un punto nello spazio non può essere definita matematicamente. Quando parliamo della posizione di un punto ci riferiamo sempre alla posizione del punto rispetto ad un altro punto scelto come riferimento.

Per descrivere matematicamente la posizione possiamo :

i) fissare un sistema di riferimento cartesiano con con origine nel punto scelto come riferimento e tre assi ortogonali di orientamento arbitrario. La posizione del punto sarà definita univocamente da una terna ordinata di numeri che rappresentano le coordinate (x, y, z) del punto nel sistema di riferimento scelto.

ii) costruire il vettore posizionale (o vettore posizione). Il vettore posizionale è il vettore che congiunge l'origine al punto (con coda nell'origine)

Le due descrizioni sono equivalenti. Si considerino infatti i tre versori ortogonali $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ con le stesse direzioni e verso degli assi cartesiani del sistema di riferimento del punto i). Esprimendo le componenti del vettore posizionale del punto ii) usando questi tre versori otterremo proprio che le tre componenti sono (x, y, z) ovvero le coordinate del punto (la terna cartesiana di un punto è proprio la rappresentazione cartesiana del vettore posizionale). Ovviamente una qualsiasi terna di versori ortogonali può essere adottata per esprimere il vettore posizionale per componenti. Terne differenti corrisponderanno a componenti differenti (ma il vettore risultante dalla sovrapposizione sarà sempre lo stesso).

Risulta perciò evidente che per definire univocamente la posizione di un punto sono necessari 3 numeri (con la loro unità di misura). Si ricordi comunque che i 3 numeri non hanno significato se non si specificano 3 assi orientati ed un'origine rispetto ai quali dare significato ai 3 numeri.

Arriviamo a questo punto al problema di descrivere il movimento di un punto materiale. Studiare il moto di un punto materiale significa registrare la sua posizione al variare del tempo. Quando un punto si muove le sue coordinate cambiano nel tempo o equivalentemente il vettore posizionale varia nel tempo. Il punto descrive una traiettoria. La traiettoria è l'insieme delle posizioni occupate dal punto materiale durante il moto.

Anche il moto è un concetto relativo. Supponiamo di essere su un treno in prossimità di una stazione ferroviaria. Fuori dal finestrino vediamo un secondo treno e notiamo che *si sta muovendo rispetto* *a noi*. Dunque concluderemo che ci stiamo muovendo rispetto al secondo treno e conseguentemente il secondo treno si sta muovendo rispetto a noi. E' impossibile da questa sola osservazione stabilire quale dei due treni si sta muovendo rispetto alla stazione. Le possibilità sono diverse: entrambi i treni potrebbero essere in movimento rispetto alla stazione, oppure uno potrebbe essere fermo rispetto alla stazione e l'altro in movimento. Per concludere: lo stato di moto di un treno è sempre definito rispetto ad un riferimento (in questo caso il secondo treno o la stazione, ad esempio).

Ci sono due metodi per descrivere univocamente lo stato di moto di un punto materiale (una volta scelto un sistema di riferimento):

a) si può dare la traiettoria e la funzione spostamento sulla traiettoria (in questo caso parleremo di descrizione intrinseca del moto)
b) si può dare il vettore posizionale in funzione del tempo (definendo una base di versori e quindi le tre componenti rispetto a questa base in funzione del tempo). Parleremo in particolare di descrizione vettoriale del moto; parleremo di descrizione cartesiana quando le tre componenti sono proprio le coordinate $\left(x(t), y(t), z(t)\right)$.

Si noti che la ricostruzione della traiettoria di un punto materiale (o del suo vettore posizionale in funzione del tempo) richiede l'interpolazione di una serie di dati: per studiare il moto di un punto possiamo registrare la sua posizione a certi istanti di tempo (ad esempio ogni 5 secondi) quindi, al termine della misura, siamo in grado di esprimere con certezza (a meno di errori di misura) solo alcuni punti della traiettoria. La nostra ricostruzione del moto risulterà più completa se saremo in grado di misurare la posizione del punto ad intervalli di tempo più piccoli fra una misura e l'altra.

Descrizione intrinseca del moto

La traiettoria di un punto che si muove è una curva nello spazio. Per semplicità se ci limitiamo ai moti piani (ovvero al moto di punti materiali su un piano) allora la traiettoria di questi punti può essere descritta da un'equazione del tipo $f(x,y)=0$ avendo scelto un opportuno sistema di riferimento cartesiano sul piano (in questo caso con gli assi x,y sul piano e l'asse z perpendicolare al piano).

Esempi

Se la traiettoria di un punto è una retta allora l'equazione è del tipo $ax+by+c=0$;

Se la traiettoria è una parabola allora l'equazione *potrebbe* essere del tipo $y-ax^2+bx+c=0$ (questa equazione descrive solo le parabole con asse di simmetria parallelo all'asse y);

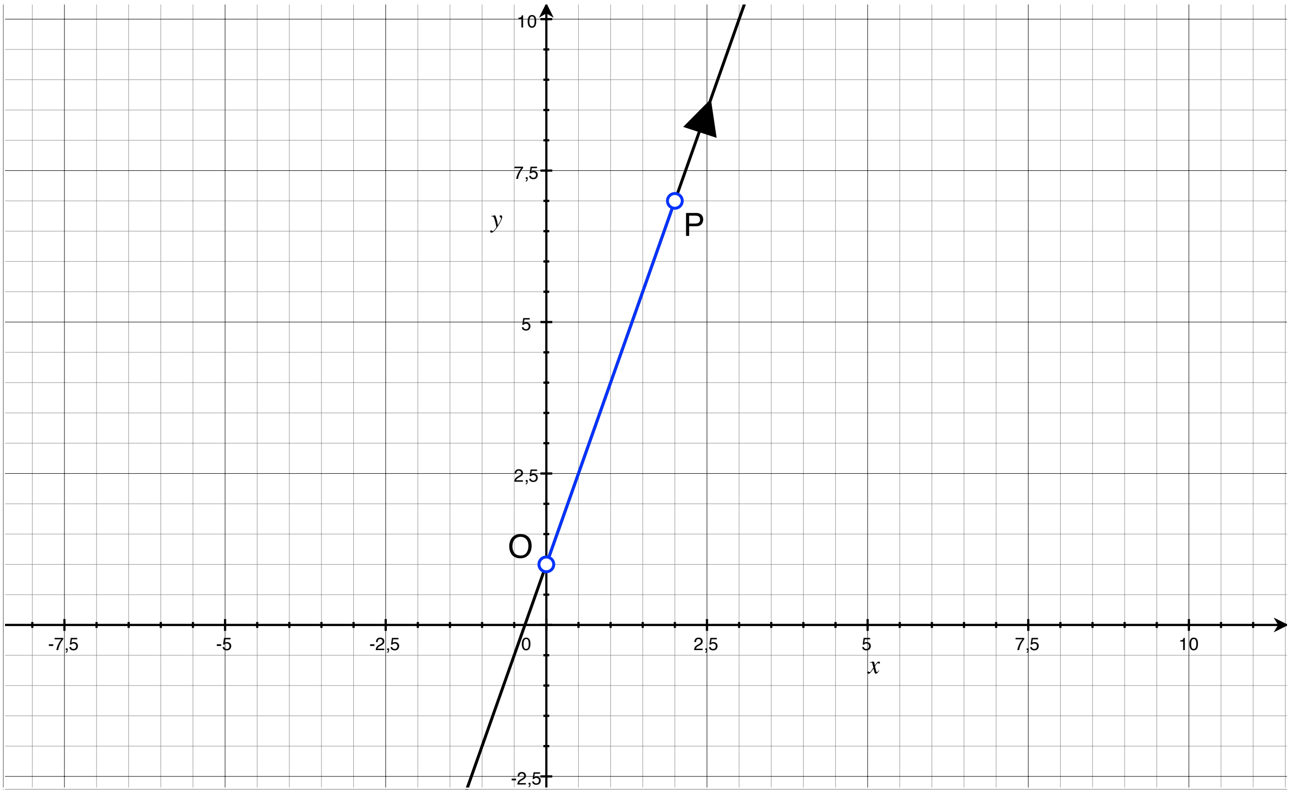
Se la traiettoria è una circonferenza allora l'equazione è del tipo $x^2+y^2+ax+by+c=0$;

Se la traiettoria è un'ellisse allora l'equazione *potrebbe* essere del tipo $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$ (questa equazione descrive ellissi con i fuochi sull'asse x).

Ovviamente l'equazione potrebbe essere molto più complessa.

Una volta determinata la traiettoria del moto è necessario definire il modo in cui il punto materiale si muove su di essa. Per farlo si fissi su di essa un punto arbitrario O ed un verso di percorrenza (attenzione a non confondere in questo contesto il punto O definito sulla traiettoria e l'origine del sistema di riferimento cartesiano). La posizione di un punto P sulla traiettoria sarà univocamente data da un numero reale con relativa unità di misura che rappresenti lo spostamento sulla traiettoria "s" ovvero la lunghezza dell'arco OP (assumendo s positivo quando P è dalla stessa parte dell'orientamento scelto sulla traiettoria ed s negativo quando è dalla parte opposta)

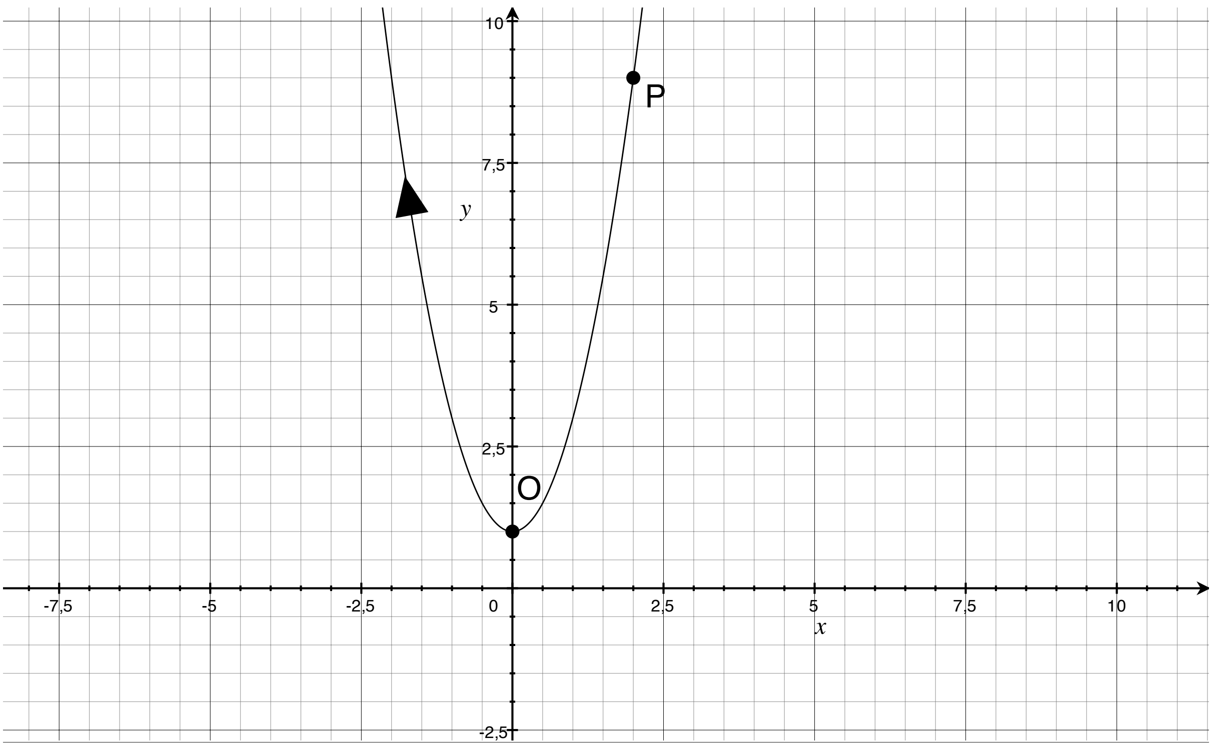
<u>*Esempio 1*</u>: si immagini che un punto materiale abbia una traiettoria rettilinea $y=3x+1$. Determinare lo spostamento s sapendo che O è scelto in corrispondenza dell'intersezione con l'asse delle ordinate, la retta è orientata in verso positivo nella direzione delle ascisse crescenti e sapendo che P ha coordinate $(2,7)$.



Soluzione: s è $+\overline{OP}$ essendo $\overline{OP}$ la distanza fra l'origine ed il punto. Tale distanza si può calcolare con il teorema di Pitagora, essendo note le coordinate di O e di P, come:

$$\overline{OP}=\sqrt{(2-0)^2+(7-1)^2}=\sqrt{4+36}=2\sqrt{10}\,.$$

Esempio 2: si determini s per il punto P sulla parabola di equazione $y=2x^2+1$ essendo O $(0,1)$, P $(2,9)$ ed essendo positivo l'orientamento nel verso delle ascisse decrescenti.



Soluzione: s è dato dall'opposto della misura dell'arco rettificato OP (è quindi un numero reale negativo!).

Si noti che lo spostamento s non dipende semplicemente dalle posizioni relative di O e di P nello spazio ma dipende anche dalla traiettoria che li congiunge.

Quando il punto P si muove sulla traiettoria allora lo spostamento s è una funzione del tempo $s(t)$. La funzione spostamento $s(t)$ prende anche il nome di legge oraria. Questa funzione calcolata ad un certo istante rende la posizione s del punto in quell'istante.

Velocità media e velocità istantanea

Immaginiamo ora di conoscere la posizione $s(t_1)$ $s(t_2)$ del punto agli istanti t_1 e t_2 e la sua traiettoria. Definiamo velocità media del punto nell'intervallo di tempo $\Delta t = t_2 - t_1$ la quantità

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

essendo $\Delta s = s(t_2) - s(t_1)$ ovvero la distanza fra le posizioni del punto agli istanti t_1 e t_2 calcolata sulla traiettoria!

Un moto si dice uniforme se la velocità media è la stessa per qualsiasi scelta di t_1 e di t_2. Se il moto di un punto è uniforme esso copre archi di circonferenza uguali in tempi uguali.

I moti che si osservano in natura difficilmente sono moti di tipo uniforme: si parla in questi casi di moto vario. Per questi moti la velocità media dipende dall'intervallo di tempo considerato e quindi è una proprietà poco rilevante. In questi casi è necessario introdurre il concetto di velocità istantanea. La velocità istantanea è la velocità media calcolata su intervalli di tempo infinitamente piccoli. Essa è definita solo teoricamente con un'operazione di limite:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \frac{ds(t)}{dt};$$

sperimentalmente possiamo pensare che misure della velocità media fatte con strumenti sempre più precisi e su intervalli di tempo sempre più piccoli diano risultati molto vicini alla velocità istantanea. Nel caso di moti uniformi la velocità media e la velocità istantanea sono uguali.

La velocità (sia essa media o istantanea) è un numero con un segno positivo o negativo. Il segno positivo ci dice che il punto P si sta muovendo (mediamente o istantaneamente) nello stesso verso di quello definito come orientamento sulla traiettoria.

La velocità è ottenuta dividendo uno spostamento per un intervallo di tempo. Se lo spostamento è espresso in metri e l'intervallo di tempi in secondi allora la velocità sarà espressa in metri diviso secondi (m/s).

Si noti infine che le definizioni di velocità media ed istantanea non dipendono dalla traiettoria ma solo dallo spostamento espresso in funzione del tempo. Il valore della velocità non dipende dall'origine O scelta sulla traiettoria poiché la differenza Δs dipende solo dalla misura dell'arco percorso, ma il segno della velocità dipende ovviamente dall'orientamento scelto sulla traiettoria.

Accelerazione media ed istantanea

In maniera analoga a quanto fatto per la velocità media ed istantanea è possibile definire un'accelerazione media ed un'accelerazione istantanea.

Immaginiamo ora di conoscere la velocità istantanea $v(t_1)$ $v(t_2)$ del punto agli istanti t_1 e t_2. Definiamo <u>accelerazione media</u> del punto nell'intervallo di tempo $\Delta t = t_2 - t_1$ la quantità

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

essendo $\Delta v = v(t_2) - v(t_1)$ ovvero la differenza fra le velocità istantanee del punto agli istanti t_1 e t_2.

L'<u>accelerazione istantanea</u> è l'accelerazione media calcolata su intervalli di tempo infinitamente piccoli. Essa è definita solo teoricamente con la seguente operazione di limite:

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2 s(t)}{dt^2}.$$

L'accelerazione è ottenuta dividendo una velocità ed un tempo. Se la velocità è espressa in metri diviso secondi e il tempo in secondi allora l'accelerazione sarà espressa in metri diviso secondi al quadrato (m/s^2).

La traiettoria e la velocità di un punto permettono di classificare diversi tipi di moto.

Il moto rettilineo è quello di un punto materiale che si muove su una retta. Il moto rettilineo uniforme è il moto con velocità costante, il

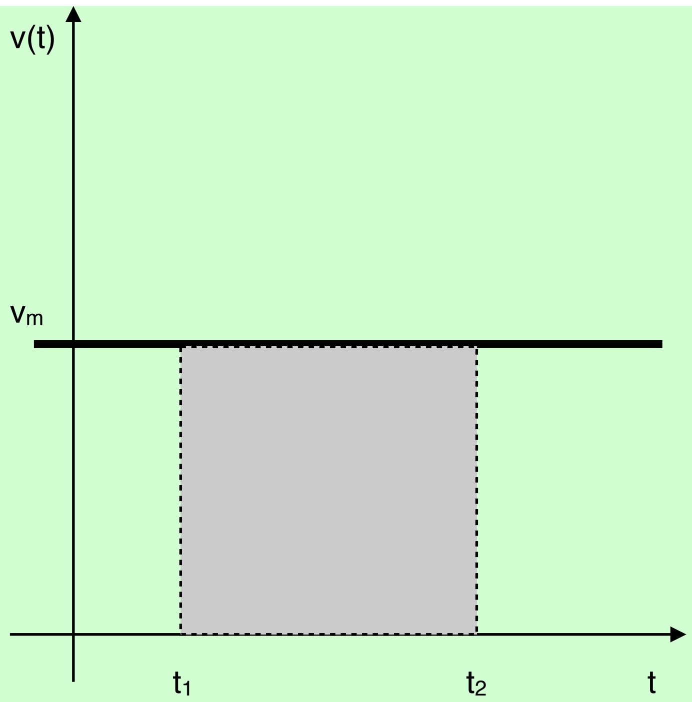
moto rettilineo uniformemente accelerato è il moto di un punto con accelerazione costante.
Il moto circolare è quello di un punto che si muove su una circonferenza. Il moto circolare uniforme è il moto con velocità costante.
In generale di definisce uniforme un moto con velocità istantanea costante.

Moto Uniforme

Per definizione in un moto uniforme la velocità istantanea è la stessa lungo tutta la traiettoria ed è uguale alla velocità media. Vale quindi:

$$v(t) = v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} ,$$

Se rappresentiamo graficamente la velocità istantanea in funzione del tempo osserveremo semplicemente una retta costante parallela all'asse delle ascisse.



Lo spostamento $\Delta s = s(t_1) - s(t_2)$ corrispondente ad un intervallo di tempo $\Delta t = t_2 - t_1$ è dato da $\Delta s = v_m \Delta t$ ed è evidentemente uguale all'area sottesa al grafico della velocità fra gli istanti t_1 e t_2 (si assuma per convenzione l'area positiva quando giace nel semipiano delle ordinate positive e l'area negativa quando giace nel semipiano delle ordinate negative).

In generale l'area sottesa dal grafico della velocità in funzione del tempo è legata allo spazio percorso. L'accelerazione media e l'accelerazione istantanea in un moto uniforme sono uguali a zero.

Moto uniformemente accelerato (decelerato)

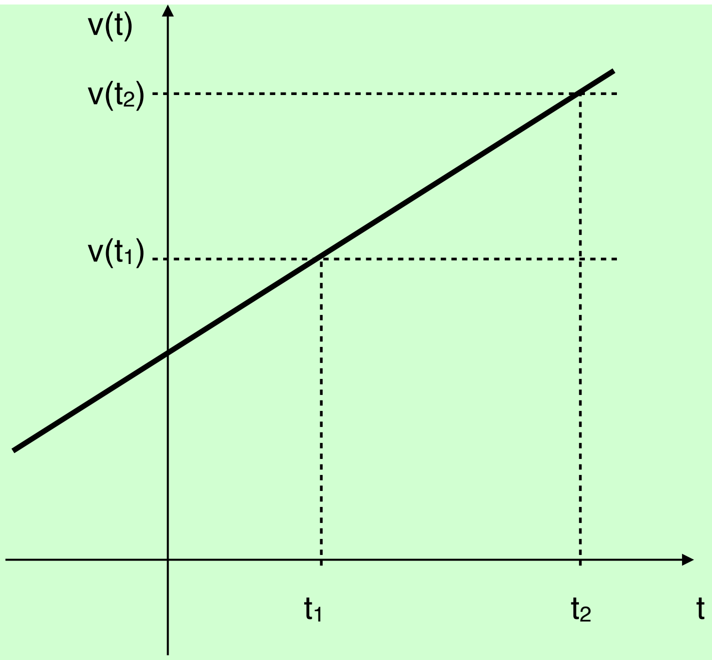
Per definizione il moto uniformemente accelerato è il moto di un punto con accelerazione media ed istantanea uguali e costanti. In generale la variazione di velocità fra due istanti di tempo è data da

$\Delta v = v(t_2) - v(t_1) = a_m \Delta t = a_m (t_2 - t_1)$. Se rappresentiamo graficamente l'accelerazione in funzione del tempo osserveremo semplicemente una retta costante parallela all'asse delle ascisse e Δv è dato dall'area sottesa dalla retta fra i punti t_1 e t_2 (con la convenzione del segno usata nell'esercizio precedente). Dall'espressione appena ottenuta osserviamo che sostituendo $t_2 \to t$ si ricava l'espressione della velocità istantanea ad un generico istante di tempo:

$$v(t) = v(t_1) + a_m \left(t - t_1\right).$$

Si noti che la velocità istantanea dipende dalla velocità ad un istante arbitrariamente scelto (in questo caso t_1).

Vediamo ora come sia possibile determinare lo spostamento. Per determinarlo possiamo procedere per via grafica: rappresentiamo la velocità istantanea in funzione del tempo e determiniamo l'area sottesa dal grafico.



L'espressione della velocità istantanea in funzione del tempo è l'equazione di una retta con coefficiente angolare a_m (si pensi alla sostituzione $y \to v(t), x \to t$).

E' evidente dal grafico della velocità che l'area sottesa dalla retta è data dalla somma del lato del rettangolo di altezza $v(t_1)$ e di base $\Delta t = t_2 - t_1$ con l'area del triangolo rettangolo di cateti $\Delta v = v(t_2) - v(t_1) = a_m \Delta t$ e Δt . Ricapitolando

$$\Delta s = v(t_1)\Delta t + \frac{1}{2}\Delta v \Delta t = v(t_1)\Delta t + \frac{1}{2}a_m \Delta t^2 .$$

Ricordando la definizione di $\Delta s = s(t_2) - s(t_1)$ e sostituendo a t_2 un generico t si ottiene l'espressione dello spostamento in funzione del tempo per un moto uniformemente accelerato:

$$s(t) = \frac{1}{2}a_m \left(t - t_1\right)^2 + v(t_1)\left(t - t_1\right) + s(t_1)$$

Esercizi

1) Un'auto viaggia alla velocità costante di $108\ Km/h$; determinare la velocità in m/s ed il tempo che impiega per percorrere $36\ Km$. ($30\ m/s$, $20\ \min$)

2) Due auto viaggiano di moto uniforme lungo due strade rettilinee formanti, fra di loro, un angolo retto. Sapendo che le due auto hanno velocità rispettivamente di $10\ m/s$ e $20\ m/s$ e che sono partite allo stesso istante dall'incrocio fra le due strade, determinare la distanza in linea d'aria dopo 5 minuti. ($6708\ m$)

3) Un corridore percorre 3 giri di una pista lunga $800\ m$ impiegando i seguenti tempi: $120\ s$, $122\ s$, $123.5\ s$. Calcolare la velocità media a ciascun giro e la velocità media sull'intero percorso. ($6.67\ m/s$, $6.56\ m/s$, $6.48\ m/s$, $6.57\ m/s$)

4) Un'auto viaggia per $200\ Km$ alla velocità media di $50\ Km/h$ ed i successivi $160\ Km$ alla velocità media di $80\ Km/h$; calcolare la velocità media nell'intero percorso.

5) Un'auto entra in autostrada e viaggia con velocità costante di $60\ Km/h$. Una seconda auto entra in autostrada un'ora dopo la prima e viaggia con la velocità costante di $80\ Km/h$. Calcolare a quale istante dall'ingresso della prima auto in autostrada essa viene raggiunta dalla seconda auto e quanta strada e stata percorsa dalla auto a quell'istante. ($4\ h$, $240\ Km$)

6) Un'automobile viaggia alla velocità di $60\,Km/h$. Premendo l'acceleratore la velocità aumenta con accelerazione costante di $2\,m/s^2$ fino a $132\,Km/h$. Calcolare l'intervallo di tempo in cui si è avuta la variazione di velocità. ($10\,s$)

7) Un'automobile si muove alla velocità di $90\,Km/h$ allorché, improvvisamente, si presenta un ostacolo a $30\,m$. Il guidatore, azionando i freni, riesce ad ottenere un moto uniformemente decelerato con decelerazione uguale a $10\,m/s^2$. Stabilire se l'auto investe l'ostacolo. (si)

8) Un auto alla velocità di $108\,Km/h$ è costretta a fermarsi. Supponendo che occorrano $0.5\,s$ affinché i riflessi consentano all'autista di frenare, calcolare lo spazio percorso dall'istante in cui il guidatore è costretto a fermarsi. Si supponga che durante la frenata il moto sia uniformemente decelerato con decelerazione uguale a $10\,m/s^2$.

Descrizione vettoriale del moto

Come già preannunciato la descrizione del moto tramite il vettore posizionale è perfettamente equivalente rispetto alla descrizione intrinseca. Il vettore posizionale di un punto in movimento varia nel tempo (può variare in modulo, direzione e verso).

Se $\vec{r}(t_1),\ \vec{r}(t_2)$ sono i vettori posizionali del punto agli istanti t_1 e t_2 allora possiamo definire la <u>velocità vettoriale media</u> del punto nell'intervallo $\Delta t = t_2 - t_1$ come

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

essendo $\Delta \vec{r} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)$ ovvero il vettore spostamento fra i punti $\vec{r}(t_1),\ \vec{r}(t_2)$. Con un'operazione di limite è poi possibile definire la <u>velocità vettoriale istantanea</u> come

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}.$$

Le unità di misura di velocità vettoriali e delle velocità definite nei paragrafi precedenti sono le stesse.

Si noti inoltre che:

1) per moti non rettilinei $\|\Delta \vec{r}\| \neq \Delta s$ e perciò per questi moti $\|\vec{v}_m\| \neq v_m$. Questo succede perché Δs rappresenta la lunghezza di un arco mentre $\|\Delta \vec{r}\|$ rappresenta la lunghezza della corda sottesa dallo stesso arco;

2) Quando ragioniamo su tempi infinitamente piccoli e quindi spostamenti infinitesimi l'arco e la corda sottesa diventano indistinguibili quindi vale sempre che $\|\vec{v}(t)\| = |v(t)|$;
3) La direzione della velocità vettoriale istantanea del punto è tangenziale alla sua traiettoria. Vale la relazione $\vec{v}(t) = v(t)\,\hat{t}_t$ essendo t_t un versore tangenziale alla traiettoria in corrispondenza del punto $\vec{r}(t)$.

Se $\vec{v}(t_1),\ \vec{v}(t_2)$ sono le velocità vettoriali istantanee del punto agli istanti t_1 e t_2 allora possiamo definire l'<u>accelerazione vettoriale media</u> del punto nell'intervallo $\Delta t = t_2 - t_1$ come

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

essendo $\Delta \vec{v} = \vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1)$ il vettore differenza fra le velocità $\vec{v}(t_1),\ \vec{v}(t_2)$. Con un'operazione di limite è poi possibile definire l'accelerazione vettoriale istantanea come

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}.$$

Le unità di misura delle accelerazione vettoriali e delle accelerazioni definite nei paragrafi precedenti sono le stesse.

Si noti inoltre che:

1) per moti non rettilinei $\|\Delta\vec{v}\| \neq \Delta v$ e perciò per questi moti $\|\vec{a}_m\| \neq a_m$. Questo succede perché Δv rappresenta la differenza dei moduli del vettore velocità (per quanto osservato nel punto 2) mentre $\|\Delta\vec{v}\|$ rappresenta il modulo della differenza dei vettori velocità; siccome i vettori si sommano e sottraggono secondo la regola del parallelogramma queste quantità sono diverse a meno che il moto non sia rettilineo (o salvo altri casi particolari).
2) Solo per moti rettilinei vale che $\|\vec{a}(t)\| = |a(t)|$ ad ogni istante di tempo;
3) In generale l'accelerazione vettoriale istantanea ad un certo istante t si può scrivere come la somma di due contributi come

$$\vec{a}(t) = \frac{dv(t)}{dt}\hat{t}_t + \frac{v(t)^2}{R_t}\hat{n}_t$$

essendo t_t un versore tangenziale alla traiettoria in corrispondenza del punto $\vec{r}(t)$, $\hat{n}_t$ è un versore ortogonale a t_t ed R_t è il raggio di curvatura della traiettoria in corrispondenza del punto $\vec{r}(t)$ (il pedice di t_t ed $\hat{n}_t$ vuole indicare che, in genere, questi versori dipendono dal tempo).

Non dimostreremo, in generale, l'espressione sopra. Ci limiteremo a verificarla ricavando separatamente i due contributi (tangenziale e normale) per un moto rettilineo (contributo tangenziale) e per un moto circolare uniforme (contributo normale).

Interpretazione geometrica della derivata

Nelle pagine precedenti si sono più volte incontrate delle espressioni formali di questo tipo:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}.$$

L'operazione matematica descritta da $\lim_{\Delta t \to 0}$ prende il nome di <u>operazione di limite</u>. Questa operazione viene definita nel corso di analisi, all'interno del quale lo lo studente impara come calcolare il risultato di questa operazione. All'interno di questa introduzione alla meccanica del punto materiale, e nel caso in questione, sia sufficiente sapere che il risultato di questa operazione si può ottenere con buona approssimazione calcolando la funzione a destra di $\lim_{\Delta t \to 0}$

$$\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}$$

per valori sempre più piccoli di Δt . Se la funzione non ha un grafico "particolare", allora calcolando la funzione per valori sempre più piccoli Δt si ottiene un'approssimazione sempre migliore del risultato dell'operazione di limite della funzione stessa.

Se la funzione di cui si calcola il limite è un rapporto del tipo di quello che stiamo considerando allora il limite della funzione $\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}$ si chiama derivata di $f(t)$. La derivata di una funzione è essa stessa una funzione della stessa variabile indipendente.

Si noti che:

1) se $f(t)=k$ (è costante) allora $f(t+\Delta t)=f(t)$ e quindi :

$$\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}=0 \Rightarrow \lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}=0\,;$$

2) se $f(t)=at+b$ allora

$$\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}=\frac{a(t+\Delta t)+b-(at+b)}{\Delta t}=a \Rightarrow \lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}=a$$

ovvero la derivata di $f(t)$ è il coefficiente angolare della retta $f(t)=at+b$ sul piano cartesiano di assi (t,f) . (si noti che una funzione costante è una retta parallela all'asse delle ascisse e quindi con coefficiente angolare nullo)

3) se $f(t)=at^2+bt+c$ allora

$$f(t+\Delta t)=a(t+\Delta t)^2+b(t+\Delta t)+c=at^2+bt+c+a\Delta t^2+2at\Delta t+b\Delta t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(t+\Delta t)=f(t)+\Delta t(a\Delta t+2at+b)$$

dunque:

$$\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}=(a\Delta t+2at+b)$$

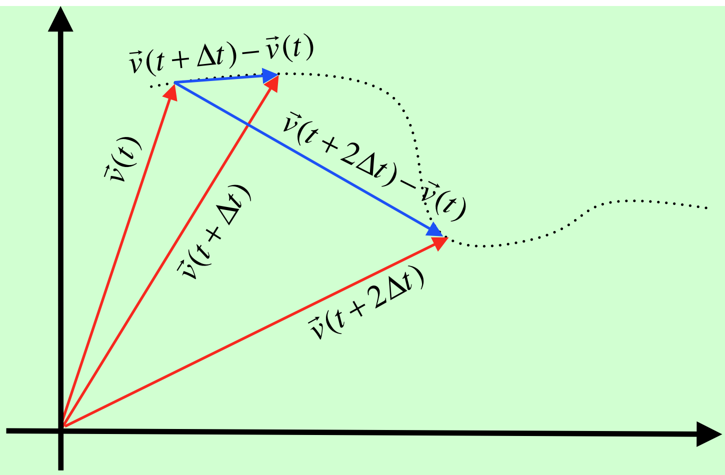
Rimpicciolendo progressivamente Δt è evidente che il termine $a\Delta t$ diventa sempre più piccolo fino ad essere trascurabile rispetto agli altri due. Quindi concludiamo che

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}=2at+b\,.$$

Geometricamente la derivata di una funzione è il coefficiente angolare della retta tangente alla funzione stessa. Lo abbiamo dimostrato quando le funzioni da derivare erano delle rette e generalizziamo (senza dimostrarlo) questa affermazione al caso di una funzione generica. Come parziale verifica della nostra affermazione si consideri la parabola del caso 3: la tangente ad una parabola ha coefficiente angolare che cambia di segno quando si passa da sinistra a destra del vertice della parabola stessa. La coordinata del vertice di una parabola è $x_V = -b/2a$ ed infatti la derivata che abbiamo ottenuto per la parabola inverte il suo segno proprio in corrispondenza di questo punto.

È possibile definire la derivata di un vettore che dipende dal tempo allo stesso modo che è stato utilizzato per definire la derivata di una funzione. La velocità vettoriale istantanea e l'accelerazione vettoriale istantanea sono rispettivamente le derivate del vettore posizione e del vettore velocità istantanea. La derivata di un vettore è, a sua volta, un vettore.

Si consideri un vettore generico $\vec{v}$ che varia al avariare del tempo. Fissiamo la sua origine, la sua punta descriverà una traiettoria al variare del tempo:



Il vettore differenza $\vec{v}(t+\Delta t)-\vec{v}(t)$ (vettore blu in figura) diventa sempre più simile ad un vettore tangente alla traiettoria descritta da $\vec{v}(t)$ e nel limite $\Delta t \to 0$ è proprio tangente.

Dunque se calcoliamo la derivata del vettore posizione $\vec{r}(t)$ otteniamo il vettore velocità che è tangente alla traiettoria descritta da $\vec{r}(t)$. Ma la traiettoria descritta del vettore posizione è proprio la traiettoria fisica del punto materiale quindi il vettore velocità istantanea è tangente alla traiettoria del punto.

Se calcoliamo invece il vettore accelerazione istantanea $\vec{a}(t)$ esso sarà la derivata del vettore velocità istantanea. Il vettore accelerazione è tangente alla traiettoria disegnata dal vettore velocità ma quest'ultima traiettoria non coincide con quella descritta dal punto materiale.

Approfondimento: la derivata di un vettore

Si noti anzitutto che nella definizione di velocità ed accelerazione vettoriali istantanee è stato formalmente introdotta la derivata di un vettore. Come si deriva un vettore?

Vediamo di elencare alcune semplici proprietà di cui gode l'operazione di derivazione di un vettore in analogia con le più note proprietà della derivazione di una funzione reale.

La derivata di un vettore è lineare (regola della somma): la derivata di un vettore somma è uguale alla somma delle derivate dei vettori componenti:

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{v}_1(t)+\vec{v}_2(t)\right)=\frac{d}{dt}\vec{v}_1(t)+\frac{d}{dt}\vec{v}_2(t);$$

vale inoltre la regola di Leibniz (regola del prodotto) rispetto a tutti i possibili prodotti definiti con i vettori (prodotto per uno scalare, prodotto scalare, prodotto vettoriale) ovvero:

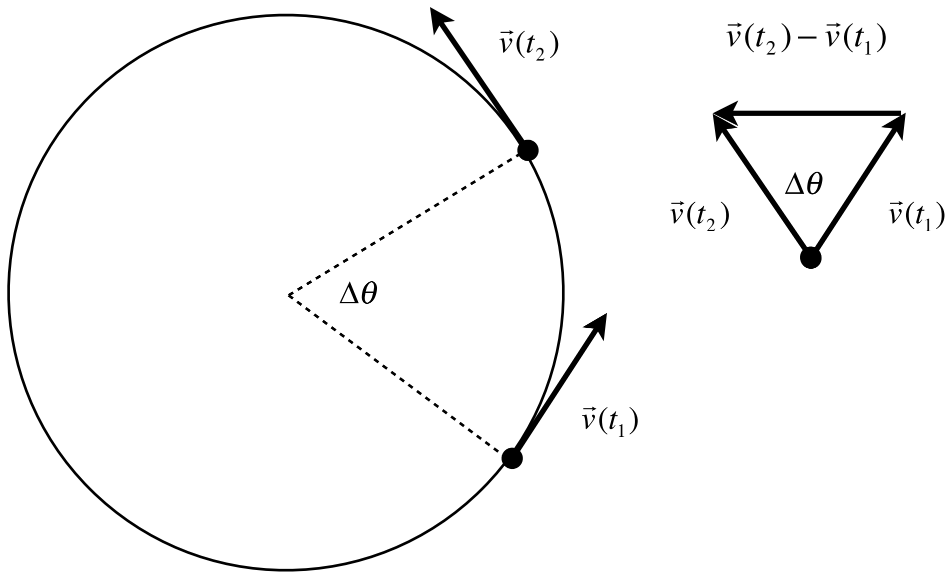
1) $\frac{d}{dt}\left(\alpha(t)\,\vec{v}(t)\right)=\frac{d\alpha(t)}{dt}\vec{v}(t)+\alpha(t)\frac{d\vec{v}(t)}{dt}$ rispetto al prodotto per uno scalare,

2) $\frac{d}{dt}\left(\vec{v}(t)\cdot\vec{w}(t)\right)=\frac{d\vec{v}(t)}{dt}\cdot\vec{w}(t)+\vec{v}(t)\cdot\frac{d\vec{w}(t)}{dt}$ rispetto al prodotto scalare,

3) $\frac{d}{dt}\left(\vec{v}(t)\wedge\vec{w}(t)\right)=\frac{d\vec{v}(t)}{dt}\wedge\vec{w}(t)+\vec{v}(t)\wedge\frac{d\vec{w}(t)}{dt}$ rispetto al prodotto vettoriale.

Moto Circolare Uniforme

Il moto circolare uniforme è il moto di un punto materiale su una circonferenza con velocità costante. E' importante studiare il moto circolare uniforme con gli strumenti della cinematica vettoriale.



Il vettore velocità istantanea è sempre tangente alla traiettoria del punto ed ha modulo uguale alla velocità istantanea (che costante nel caso di moto uniforme).

Questo significa che la velocità vettoriale istantanea varia nel tempo (varia in direzione e verso ma non in modulo!) perciò l'accelerazione vettoriale non è uguale a zero. Ricapitolando l'accelerazione è nulla perché la velocità è costante ma l'accelerazione vettoriale è diversa da zero perché la velocità vettoriale cambia nel tempo.

Per ottenere il verso dell'accelerazione vettoriale notiamo che il vettore velocità è costante in modulo e ruota contemporaneamente al vettore posizione (formando un angolo di 90° con esso). Il vettore accelerazione dunque formerà un angolo di 90° con il vettore velocità ed un angolo di 180° con il vettore posizione. È quindi “centripeto” ovvero è diretto verso il centro della circonferenza e quindi normale alla direzione della velocità.

Possiamo stimare il valore dell’accelerazione centripeta di un moto circolare da semplici considerazioni dimensionali. In fisica l’analisi dimensionale, ovvero lo studio delle unità di misure delle grandezze fisiche necessarie alla risoluzione di un problema, fornisce, spesso, un utile strumento di calcolo approssimato. In pratica se dobbiamo risolvere un problema di fisica partendo da un certo numero di grandezze fisiche note in ipotesi è spesso possibile stimarne il risultato producendo con le ipotesi un risultato dimensionamente accettabile. Ad esempio: se dobbiamo stimare l’accelerazione normale di un moto circolare uniforme con velocità nota v raggio della traiettoria noto R allora possiamo costruire tale accelerazione combinando opportunamente v ed R fino ad ottenere un numero con le unità di misura di un’accelerazione. Siccome $[v]=LT^{-1}$, $[R]=L$ e $[a]=LT^{-2}$ allora la combinazione più semplice per ottenere un’accelerazione sarà:

$$a=\frac{v^2}{R}\rightarrow[a]=\left[\frac{v^2}{R}\right]\rightarrow LT^{-2}=\left(LT^{-1}\right)^2L^{-1}=LT^{-2}.$$

Questa stima è proprio il risultato esatto, in questo caso!

Ricordando l'espressione per l'accelerazione vettoriale

$$\vec{a}(t) = \frac{dv(t)}{dt}\hat{t}_t + \frac{v(t)^2}{R_t}\hat{n}_t$$

osserviamo dunque che il primo contributo è uguale a zero e sopravvive solo il secondo:

Il contributo deriva dal fatto che il vettore velocità cambia in direzione e verso lungo la traiettoria.

Approfondimento: curve e vettori

È evidente che il vettore posizionale può essere adottato per descrivere una curva nello spazio, del resto le sue componenti in rappresentazione cartesiana sono proprio le coordinate (x, y, z).

Esempio 1

Si descriva con il vettore posizionale la retta $y = 3x + 1$. Un generico punto sulla retta con ascissa ξ avrà per definizione ordinata $3\xi + 1$. Il suo vettore posizionale sarà perciò

$\vec{r}(\xi) = \xi\,\hat{i} + (3\xi + 1)\,\hat{j}$ e variando ξ da $-\infty$ a $+\infty$ si otterranno tutti i punti della retta.

Esempio 2

Si descriva con il vettore posizionale la parabola $y = 2x^2 - x + 3$. Un generico punto sulla parabola con ascissa ξ avrà per definizione ordinata $2\xi^2 - \xi + 3$. Il suo vettore posizionale sarà perciò $\vec{r}(\xi) = \xi\,\hat{i} + \left(2\xi^2 - \xi + 3\right)\hat{j}$ e variando ξ da $-\infty$ a $+\infty$ si otterranno tutti i punti della parabola.

<u>*Esempio 3*</u>

Si descriva con il vettore posizionale un generico punto della circonferenza $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 4$. La circonferenza in questione ha centro in $C:(3,-1)$ ed ha raggio $R = 2$. L'equazione che descrive i punti della circonferenza è di secondo grado sia in x che in y quindi non si può ripetere il procedimento adottato per retta e parabola degli esempi precedenti.

Per rispondere alla domanda risolviamo un problema più semplice: la descrizione della circonferenza con centro nell'origine e raggio $R = 2$.

Un punto della circonferenza ha coordinate $(R\cos\theta, R\sin\theta)$ quindi il vettore posizionale sarà $\vec{r} = R\cos\theta\,\hat{i} + R\sin\theta\,\hat{j}$ con θ che varia nell'intervallo $[0,2\pi]$.

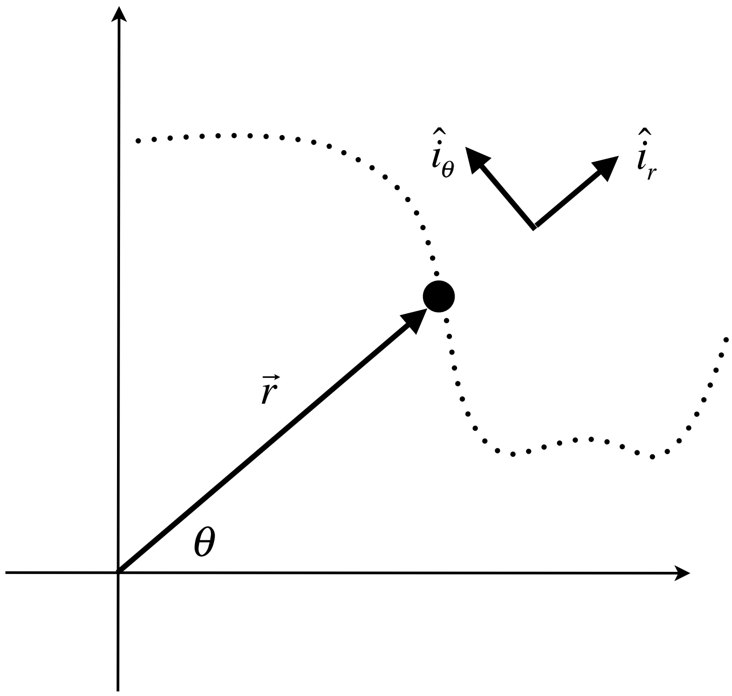
Ora torniamo al problema originale. La circonferenza ha centro in $C:(3,-1)$ invece che nell'origine quindi

$$\vec{r} = \vec{r}_C + R\cos\theta\,\hat{i} + R\sin\theta\,\hat{j} = (3 + 2\cos\theta)\,\hat{i} + (-1 + 2\cos\theta)\,\hat{j}$$

con θ che varia nell'intervallo $[0,2\pi]$.

Approfondimenti di Cinematica

La descrizione vettoriale del moto di un punto materiale si costruisce a partire dalla definizione di "vettore posizionale". In un sistema di riferimento fissato il vettore posizionale di un punto è il vettore che congiunge l'origine al punto ed è orientato nel verso del punto.



In generale possiamo definire il versore

$$\hat{i}_r = \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|}$$

come il versore che ha la stessa direzione e verso del vettore posizionale. Il vettore posizionale si può sempre scrivere come

$$\vec{r} = \|\vec{r}\| \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|} = \|\vec{r}\| \hat{i}_r$$

ovvero come il suo modulo per il versore appena definito. Specializziamo i nostri ragionamenti al caso di un moto piano. La direzione sul piano è univocamente definita dall'angolo θ che la direzione forma con l'asse delle x. In funzione di tale angolo possiamo dire che $\hat{i}_r = \cos\theta\,\hat{i} + \sin\theta\,\hat{j}$.

Se il punto materiale si muove allora il vettore posizionale varia in modulo, direzione e verso nel tempo (quindi θ cambia nel tempo). La velocità vettoriale istantanea è

$$\vec{v}(t) = \frac{d\|\vec{r}\|}{dt}\hat{i}_r + \|\vec{r}\|\frac{d\hat{i}_r}{dt} .$$

Si noti che in generale le direzioni di $\hat{i}_r$ e di $\frac{d\hat{i}_r}{dt}$ sono ortogonali. Per dimostrarlo si consideri un generico versore $\hat{v}$. Per definizione il prodotto scalare di un versore per sé stesso è 1 ovvero $\hat{v}\cdot\hat{v} = 1$. Derivando questa relazione rispetto al tempo a lato sinistro si ottiene $\frac{d\hat{v}\cdot\hat{v}}{dt} = 2\hat{v}\cdot\frac{d\hat{v}}{dt}$ e la lato destro si ottiene zero (perché la derivata di una costante è zero). Quindi:

$$\hat{v}\cdot\frac{d\hat{v}}{dt} = 0$$

che significa che il prodotto scalare di un versore e della sua derivata rispetto al tempo è zero ovvero il versore e la sua derivata sono ortogonali (a meno che il versore non abbia direzione e verso costanti, nel caso ovviamente $\frac{d\hat{v}}{dt} = 0$). Si noti che in generale la derivata di un versore non è anch'essa un versore ovvero non ha modulo uguale ad uno.

Torniamo al problema iniziale. Se calcoliamo la derivata di $\hat{i}_r$ rispetto al tempo si ottiene:

$$\frac{d\hat{i}_r}{dt} = -\dot{\theta}\sin\theta\,\hat{i} + \dot{\theta}\cos\theta\,\hat{j} = \dot{\theta}\left(-\sin\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j}\right) = \dot{\theta}\,\hat{i}_\theta$$

dove il punto indica la deriva rispetto al tempo e, nell'ultimo passaggio, viene definito il versore $\hat{i}_\theta = -\sin\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j}$ (è facile dimostrare che è un vettore utilizzando l'identità principale della trigonometria $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$).

Ricapitolando (e definendo $r = \|\vec{r}\|$):

$$\vec{v}(t) = \dot{r}\;\hat{i}_r + r\frac{d\hat{i}_r}{dt} = \dot{r}\;\hat{i}_r + r\,\dot{\theta}\,\hat{i}_\theta$$

Derivando ulteriormente l'espressione della velocità vettoriale istantanea si ottiene l'accelerazione vettoriale istantanea:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \ddot{r}\,\hat{i}_r + \dot{r}\frac{d\hat{i}_r}{dt} + \dot{r}\,\dot{\theta}\,\hat{i}_\theta + r\,\ddot{\theta}\,\hat{i}_\theta + r\,\dot{\theta}\frac{d\hat{i}_\theta}{dt}.$$

Dalla definizione di $\hat{i}_\theta$ si ottiene:

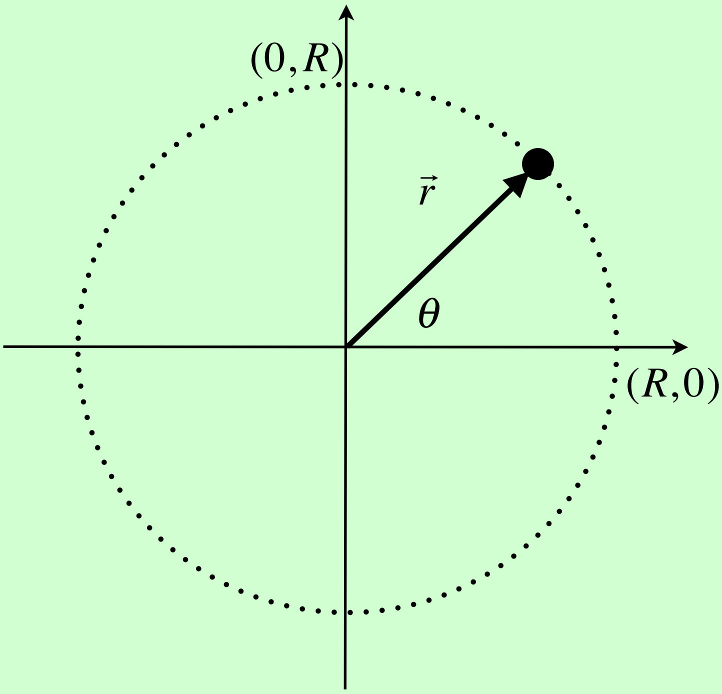
$$\frac{d\hat{i}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\cos\theta\,\hat{i} - \dot{\theta}\sin\theta\,\hat{j} = -\dot{\theta}\left(\cos\theta\,\hat{i} + \sin\theta\,\hat{j}\right) = -\dot{\theta}\,\hat{i}_r$$

e quindi l'espressione per l'accelerazione prende la forma finale

$$\vec{a}(t) = \left(\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2\right)\hat{i}_r + \left(2\,\dot{r}\,\dot{\theta} + r\,\ddot{\theta}\right)\hat{i}_\theta.$$

Esempio 1:

Si applichino le espressioni appena trovate al moto circolare.



Se fissiamo l'origine del sistema di riferimento in corrispondenza del centro della traiettoria circolare di raggio R allora il vettore posizionale sarà $\vec{r}(t) = R\,\hat{i}_r$. Il modulo del vettore posizionale è quindi costante perciò $\dot{r} = \ddot{r} = 0$ e le espressioni di velocità e accelerazione vettoriale si semplificano diventando:

$$\vec{v}(t) = \dot{\theta}\,R\,\hat{i}_\theta\,, \quad \vec{a}(t) = -R\,\dot{\theta}^2\,\hat{i}_r + R\,\ddot{\theta}\,\hat{i}_\theta = -\frac{(\vec{v}\cdot\vec{v})}{R}\hat{i}_r + R\,\ddot{\theta}\,\hat{i}_\theta\,.$$

Esempio 2:

Calcolo della componente normale e tangenziale dell'accelerazione vettoriale.

Vediamo un esempio completamente generale in cui vengono formalmente calcolate le componenti normale e tangenziale dell'accelerazione di un moto vario descritto dal vettore posizione $\vec{r}(t) = x(t)\,\hat{i} + y(t)\,\hat{j}$. L'espressione della velocità per tale moto è $\vec{v}(t) = \dot{x}(t)\,\hat{i} + \dot{y}(t)\,\hat{j}$ e quindi il versore tangente alla traiettoria al variare del tempo è:

$$\hat{t}_t = \frac{\dot{x}\,\hat{i} + \dot{y}\,\hat{j}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}},$$

dove con il pedice t intendiamo che il versore tangente varia, in generale, con il tempo. Esiste quindi ad ogni istante un versore $\hat{n}_t$ (il versore normale) tale che $\hat{n}_t \cdot \hat{t}_t = 0$.

L'accelerazione vettoriale è $\vec{a}(t) = \ddot{x}(t)\,\hat{i} + \ddot{x}(t)\,\hat{j}$. Ad un generico istante t, il vettore accelerazione si può scrivere anche come la somma di due contributi nella forma $\vec{a}(t) = a_{norm}(t)\,\hat{n}_t + a_{tang}(t)\,\hat{t}_t$. I coefficienti rispetto alla coppia di versori tangente e normale sono proprio le componenti normale e tangenziale dell'accelerazione che dobbiamo calcolare.

Ci sono due possibilità a questo punto:

1) si determina $\hat{n}_t$ nella forma $\hat{n}_t = n_{tx}\hat{i} + n_{ty}\hat{j}$ richiedendo che $\hat{n}_t \cdot \hat{t}_t = 0$ e che $\hat{n}_t \cdot \hat{n}_t = 1$. E' facile verificare che il versore che stiamo cercando è

$$\hat{n}_t = \pm \frac{\dot{y}\,\hat{i} - \dot{x}\,\hat{j}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}};$$

le componenti saranno date da

$$\begin{cases} a_{tang}(t) = \vec{a}(t) \cdot \hat{t}_t \\ a_{norm}(t) = \vec{a}(t) \cdot \hat{n}_t \end{cases}.$$

2) visto che $\hat{t}_t$ è già noto e che $a_{tang}(t) = \vec{a}(t)\cdot\hat{t}_t$ allora dalla definizione $\vec{a}(t) = a_{norm}(t)\,\hat{n}_t + a_{tang}(t)\,\hat{t}_t$ si ha che

$$a_{norm}(t)\,\hat{n}_t = \vec{a}(t) - a_{tang}(t)\,\hat{t}_t$$

il cui lato destro è calcolabile. Quindi

$$\left|a_{norm}(t)\right| = \sqrt{\left(a_{norm}(t)\,\hat{n}_t\right)\cdot\left(a_{norm}(t)\,\hat{n}_t\right)} = \sqrt{\left(\vec{a}(t) - a_{tang}(t)\,\hat{t}_t\right)\cdot\left(\vec{a}(t) - a_{tang}(t)\,\hat{t}_t\right)}\,.$$

Il moto armonico

Consideriamo ora il moto di un punto materiale vincolato a muoversi su una retta. Se la funzione spostamento è della forma

$$s(t) = s_0 + \Delta s\cos\left(\omega t + \phi_0\right)$$

allora diciamo che il punto si muove di moto armonico. Il moto armonico, a causa della periodicità della funzione coseno è un moto periodico. Questo significa che le caratteristiche del moto si ripetono ad intervalli di tempo regolari uguali al periodo della funzione coseno. Il periodo è

$$T = \frac{2\pi}{\omega}\,.$$

La frequenza di oscillazione (numero di oscillazioni al secondo) è data dall'inverso del periodo espresso in secondi:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}\,.$$

Al variare dei parametri $(s_0, \Delta s, \omega, \phi_0)$ il moto armonico ha caratteristiche diverse. In particolare s_0 è il punto centrale della traiettoria, Δs è l'ampiezza dell'oscillazione, ω si chiama pulsazione ed è proporzionale alla frequenza di oscillazione, ϕ_0 è una fase che specifica l'ampiezza all'istante $t = 0\ s$.

Il moto armonico è limitato nello spazio ovvero il punto materiale rimane sempre confinato ad una regione di lunghezza $2\Delta s$ intorno a s_0. Utilizzando la relazione trigonometrica

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

allora è possibile riscrivere la legge oraria nella forma:

$$s(t)=s_0+\Delta s\cos\phi_0\cos(\omega t)-\Delta s\sin\phi_0\sin(\omega t)=s_0+A\cos\omega t+B\sin\omega t$$

ovvero come la combinazione di un seno ed un coseno senza la fase (che viene riassorbita dai coefficienti A,B).

Vediamo ora di determinare la velocità e l'accelerazione istantanee:

$$v(t)=-\Delta s\,\omega\sin(\omega t+\phi_0)$$

e

$$a(t)=-\Delta s\,\omega^2\cos(\omega t+\phi_0)=-\omega^2\left(s(t)-s_0\right).$$

Si noti quindi che l'accelerazione è proporzionale allo spostamento rispetto all'origine ed in particolare è massima (in modulo) quando la velocità si annulla ovvero per $\cos(\omega t+\phi_0)=\pm 1$. Inoltre l'accelerazione sarà nulla quando la velocità è massima (in modulo).

Composizione di moti

Immaginiamo ora che siano note le leggi orarie di due moti rettilinei con traiettorie ortogonali e con l'origine in comune. Ad esempio nel piano (x,y) si immagini di conoscere la legge oraria $x(t)$ di un punto che si muove rispetto all'origine sull'asse delle ascisse e quella $y(t)$ di un punto che si muove sull'asse delle ordinate. Componiamo ora il moto nel senso che consideriamo la traiettoria di un punto descritto dal vettore posizionale $\vec{r}(t) = x(t)\,\hat{i} + y(t)\,\hat{j}$ e vediamo qual è il risultato di questa operazione.

Esempio 1

Partiamo dalla composizione di due moti rettilinei uniformi:

$$\begin{cases} x(t) = a\,t + b \\ y(t) = c\,t + d \end{cases}$$

dove a,b,c,d sono 4 costanti arbitrarie. Per determinare la traiettoria ricaviamo t nella prima

$$t = \frac{x-b}{a}$$

e sostituiamo nella seconda

$$y = \frac{c}{a}(x-b) + d \Rightarrow y = \frac{c}{a}x + \left(d - \frac{b\,c}{a}\right).$$

Quindi la traiettoria risultante è una retta. Su questa retta è facile verificare che il vettore posizionale descrive un moto uniforme infatti:

$$\vec{v} = a\,\hat{i} + c\,\hat{j}$$

che è costante in modulo, direzione e verso. Quindi la composizione di due moti rettilinei uniformi da un moto rettilineo uniforme lungo una nuova direzione definita dal versore

$$\hat{v} = \frac{a\,\hat{i} + c\,\hat{j}}{\sqrt{a^2 + c^2}}.$$

Si noti che la proiezione lungo i due assi cartesiani del moto composto rende proprio i due moti rettilinei di partenza.

Esempio 2

Si consideri la composizione di un moto uniforme ed un moto uniformemente accelerato:

$$\begin{cases} x(t) = a\,t + b \\ y(t) = c\,t^2 + d\,t + e \end{cases}$$

dove a,b,c,d,e sono 5 costanti arbitrarie. Per determinare la traiettoria ricaviamo t nella prima

$$t = \frac{x-b}{a}$$

e sostituiamo nella seconda:

$$y = c\left(\frac{x-b}{a}\right)^2 + d\left(\frac{x-b}{a}\right) + e\,.$$

Una volta eseguiti i prodotti riordinati i pezzi si ottiene:

$$y = \frac{c}{a^2}x + \left(\frac{d}{a} - 2\frac{b\,c}{a^2}\right)x + \left(e - \frac{b\,d}{a} + \frac{b^2 c}{a^2}\right)$$

che è l'equazione di una parabola con asse parallelo all'asse delle ordinate. Dunque il moto parabolico si può ottenere dalla sovrapposizione di un moto uniforme ed un moto uniformemente accelerato. Il moto parabolico è tipico di un grave (ovvero un oggetto dotato di massa) nel campo gravitazionale terrestre.

Esempio 3

Infine consideriamo la composizione di 2 moti armonici con la stessa pulsazione

$$\begin{cases} x(t) = A\cos\left(\omega t\right) \\ y(t) = B\cos(\omega t + \phi_0) \end{cases}.$$

Per ottenere la traiettoria anzitutto espandiamo il coseno:

$$y = B\cos\phi_0\cos\omega t - B\sin\phi_0\sin\omega t$$

poi utilizziamo il fatto che dalla prima legge oraria si ricava che

$$\cos \omega t = \frac{x}{A}$$

che sostituita nella seconda e dopo un po' di algebra darà

$$\frac{y - \left(\frac{B}{A} \cos \phi_0 \right) x}{B \sin \phi_0} = -\sin \omega t \, .$$

Si noti che questa espressione ha significato solo se il seno nn si annulla ovvero per $\phi_0 \neq k\pi$. Infine quadrando entrambi i membri delle due leggi orarie ed utilizzando la "solita" identità trigonometrica $\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t = 1$ si ottiene l'equazione della traiettoria

$$\frac{x^2}{A^2} + \left[\frac{y - \left(\frac{B}{A} \cos \phi_0 \right) x}{B \sin \phi_0} \right]^2 = 1$$

che dopo qualche semplificazione darà

$$\frac{x^2}{A^2 \sin^2 \phi_0} + \frac{y^2}{B^2 \sin^2 \phi_0} - 2 \frac{\cos \phi_0}{AB \sin^2 \phi_0} xy = 1 \, .$$

Vediamo qualche caso particolare: se lo sfasamento è $\phi_0 = \frac{\pi}{2} + k\pi$ allora $\sin^2 \phi_0 = 1$ e l'equazione diventa:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$$

che descrive un ellisse. Se poi le ampiezze delle oscillazioni sono uguali l'equazione diventa quella di una circonferenza ed il moto composto è un moto circolare uniforme.

Infine si consideri il caso in cui $\phi_0 = k\pi$. In questo caso

$$\begin{cases} x = A\cos\omega t \\ y = \pm B\cos\omega t \end{cases}$$

perciò l'equazione della traiettoria è

$$y = \pm \frac{B}{A} x$$

che è l'equazione di una retta che passa per l'origine. Il vettore posizione composito, in questo caso, si muove di moto armonico intorno all'origine sulla retta con l'equazione appena trovata con spostamento massimo $|\Delta s| = \sqrt{A^2 + B^2}$. Questo significa che in realtà la retta non rappresenta per intero la traiettoria del moto composito che è invece solo un intervallo di tale retta.

Esempio 5 (il moto elicoidale)

Il moto elicoidale è il moto risultante dalla sovrapposizione di 3 moti lungo i 3 assi di un sistema di riferimento cartesiano: due moti armonici di uguale ampiezza e sfasati di $\phi_0 = \frac{\pi}{2} + k\pi$ lungo x e y ed un moto rettilineo uniforme nella direzione dell'asse z.

Moto del proiettile

Il moto di un punto materiale nel campo terrestre è proprio un moto parabolico derivante dalla sovrapposizione di un moto rettilineo uniforme nella direzione orizzontale ed un un modo uniformemente accelerato nella direzione verticale (con accelerazione verso terra di modulo $g = 9.81\, m/s^2$). Consideriamo il moto di un punto materiale lanciato da terra con velocità di modulo v_0 e angolo di lancio α (formato fra il vettore velocità e la direzione orizzontale). Vogliamo determinare la gittata del lancio e la quota massima raggiunta in funzione di v_0 ed α. Il moto è composto ovvero:

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = 0 \\ \ddot{y}(t) = -g \end{cases}$$

quindi le componenti del vettore posizione sono:

$$\begin{cases} x(t) = \dot{x}(0)\, t + x(0) \\ y(t) = -\dfrac{1}{2} g\, t^2 + \dot{y}(0)\, t + y(0) \end{cases}.$$

Scegliendo il sistema di riferimento con origine nel punto di lancio allora $x(0) = 0$ e $y(0) = 0$ inoltre $\dot{x}(0) = v_0 \cos\alpha$ e $\dot{y}(0) = v_0 \sin\alpha$. Dunque

$$\begin{cases} x(t) = v_0 \cos\alpha\ t \\ y(t) = -\dfrac{1}{2} g\, t^2 + v_0 \sin\alpha\, t \end{cases};$$

la quota massima si ottiene cercando il massimo di $y(t)$ ovvero dalle soluzioni dell'equazione $\frac{dy}{dt}=0$. Si ha che $\dot{y}=-g\,t+v_0\sin\alpha=0 \Rightarrow t=\frac{v_0\sin\alpha}{g}$ e sostituendo in $y(t)$ si ha

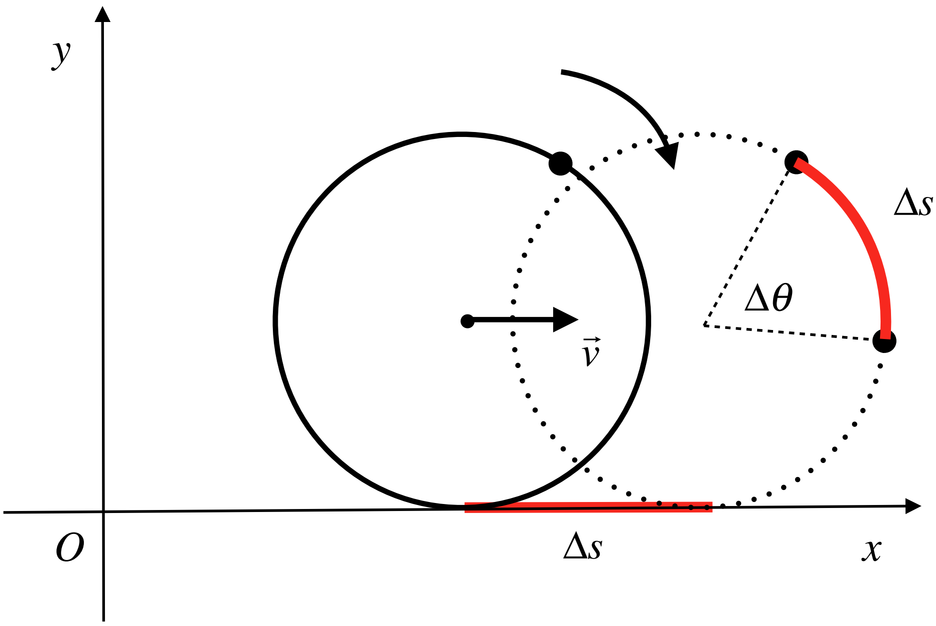
$$y_{max}=\frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}.$$

La gittata invece si ottiene cercando l'istante di tempo in cui $y(t)=0$ ovvero $t=\frac{2\,v_0\sin\alpha}{g}$ e sostituendo in $x(t)$:

$$x_{max}=\frac{v_0^2\sin 2\alpha}{g}.$$

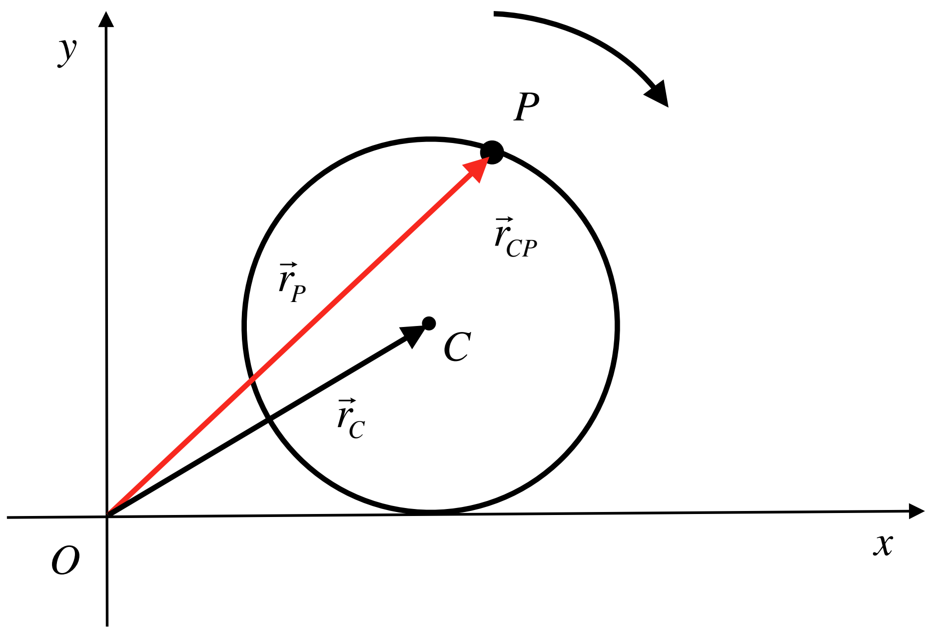
La traiettoria del Cicloide

La traiettoria del cicloide è quella di un punto sulla superficie di una ruota che rotola con velocità angolare costante. Definiamo anzitutto il concetto di rotolamento puro di un corpo esteso che rotola (un disco, una sfera, un cilindro....) perché compare di frequente nel corso di Fisica. Il punto di contatto con il suolo di un corpo che rotola è istantaneamente fermo. Questo significa che il punto di contatto non si muove rispetto al suolo ovvero il corpo non striscia (si usa spesso dire che il corpo rotola senza strisciare!).



La velocità angolare è una quantità vettoriale la cui direzione e verso si determina con la regola della mano destra: se disponiamo le dita curve della mano a seguire il senso del moto rotatorio allora il pollice indicherà direzione e verso della velocità angolare. Il modulo della velocità angolare è $\|\vec{\omega}\| = \omega = \left|\frac{d\theta}{dt}\right|$ dove $\theta = \theta(t)$ è qualche angolo che descrive la rotazione. In particolare se θ aumenta nel tempo allora $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ altrimenti $\omega = -\frac{d\theta}{dt}$. Se il corpo ruota con velocità angolare di modulo ω allora il suo centro di simmetria si muove con velocità di modulo uguale a $|v| = R\omega$ dove R è il raggio del corpo che rotola (del disco, della sfera, o il raggio di base del cilindro). Per dimostrare questa affermazione si consideri, ad esempio, un disco che ruota con velocità angolare di modulo ω in senso orario come in figura. La rotazione in senso orario definisce il verso della velocità del centro del disco (che è da sinistra a destra). Quando il punto sulla circonferenza si sposta in

senso orario descrivendo un arco di lunghezza $\Delta s = R\,\Delta\theta$ anche il centro della circonferenza ed il punto di contatto con il terreno si saranno spostati di tratto Δs verso destra. Se la velocità di rotazione è costante allora $\omega = \dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}$ ed il modulo della velocità $\vec{v}$ è costante e vale $\dfrac{\Delta s}{\Delta t} = v$. Quindi $\omega\, R = \dfrac{R\,\Delta\theta}{\Delta t} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \|\vec{v}\|$.
La relazione appena ottenuta esprime la "condizione di rotolamento puro" fra velocità angolare e modulo della velocità e vale anche per moti in cui velocità e velocità angolare istantanee non sono costanti. In generale avremo: $\|\vec{v}(t)\| = R\,|\omega(t)|$ (dove il valore assoluto è aggiunto perché non è specificato a priori in quale modo viene fissato come positivo il verso della velocità angolare).



Ora veniamo al problema originale. Il vettore posizionale del punto P si può scrivere come la somma $\vec{r}_P = \vec{r}_C + \vec{r}_{CP}$ dove $\vec{r}_C$ è il vettore posizionale del centro del disco mentre $\vec{r}_{CP}$ è il vettore posizionale del punto P rispetto al centro della circonferenza. Il centro della circonferenza si muove di moto rettilineo con velocità costante $\vec{v} = \|\vec{v}\| \hat{i}$. Il punto P rispetto al centro della circonferenza si muove di moto circolare uniforme. Quindi il vettore posizionale $\vec{r}_{CP}$ si può scrivere come

$$\vec{r}_{CP}(t) = R\cos\theta(t)\,\hat{i} + R\sin\theta(t)\,\hat{j}$$

dove l'angolo è una funzione del tempo. In questa definizione del vettore posizione l'angolo θ è l'angolo tra $\vec{r}_{CP}$ ed $\hat{i}$ (si ricordi quanto imparato per il moto circolare). Quindi θ aumenta quando il disco ruota in senso antiorario e lo spostamento del disco è $\Delta s = -R\,\Delta\theta$. Perciò $\|\vec{v}\| = R\omega = -R\dfrac{d\theta}{dt}$ e la velocità di spostamento del centro del disco è $\vec{v} = R\omega\,\hat{i}$. Detto ciò vediamo di determinare $\vec{r}_C$ e $\vec{r}_{CP}$. Siccome $\dfrac{d\vec{r}_C}{dt} = \vec{v}$ allora

$$\vec{r}_C(t) = R\,\omega\,t\,\hat{i} + \vec{r}_C(0)$$

dove $\vec{r}_C(0)$ è il vettore posizione del centro all'istante $t = 0\,s$ e si può scrivere come $\vec{r}_C(0) = x_C(0)\,\hat{i} + R\,\hat{j}$ perché C è sempre alla quota R da terra , mentre

$$\theta(t) = -\omega\,t + \theta(0)$$

dove $\theta(0)$ è l'angolo tra $\vec{r}_{CP}$ ed $\hat{i}$ all'istante $t = 0\,s$.

Ricapitolando:

$$\vec{r}_P(t) = \left[R\,\omega\,t + x_C(0) + R\cos\left(-\omega\,t + \theta(0)\right)\right]\hat{i} + \left[R + R\sin\left(-\omega\,t + \theta(0)\right)\right]\hat{j}.$$

Per ottenere l'equazione della traiettoria si procede al "solito" modo: scriviamo le coordinate del punto al variare del tempo

$$\begin{cases} x_P(t) = R\,\omega\,t + x_C(0) + R\cos\left(-\omega\,t + \theta(0)\right) \\ y_P(t) = R + R\sin\left(-\omega\,t + \theta(0)\right) \end{cases}$$

e cerchiamo una relazione $f(x_P, y_P) = 0$.

Si osserva che

$$-\omega t + \theta(0) = \arcsin\left(\frac{y_P - R}{R}\right) \Rightarrow t = \frac{\theta(0) - \arcsin\left(\frac{y_P - R}{R}\right)}{\omega} \quad ;$$

con questa inversione t risulta limitato dai valori massimo e minimo della funzione arcoseno che è compresa fra $-\frac{\pi}{2} \le \arcsin x \le \frac{\pi}{2}$. L'equazione che otterremo della traiettoria varrà quindi solo nell'intervallo di tempo $\frac{2\theta(0) - \pi}{2\omega} \le t \le \frac{2\theta(0) + \pi}{2\omega}$. Il coseno dell'arcoseno di x in generale è $\cos(\arcsin x) = \pm\sqrt{1 - x^2}$ ma per i valori dell'arcoseno in questione $-\frac{\pi}{2} \le \arcsin x \le \frac{\pi}{2}$ il coseno è positivo e quindi $\cos(\arcsin x) = +\sqrt{1 - x^2}$ ovvero

$$\cos(\arcsin \frac{y_P - R}{R}) = \sqrt{1 - \frac{(y_P - R)^2}{R^2}} \; .$$

L'equazione finale della traiettoria è infine:

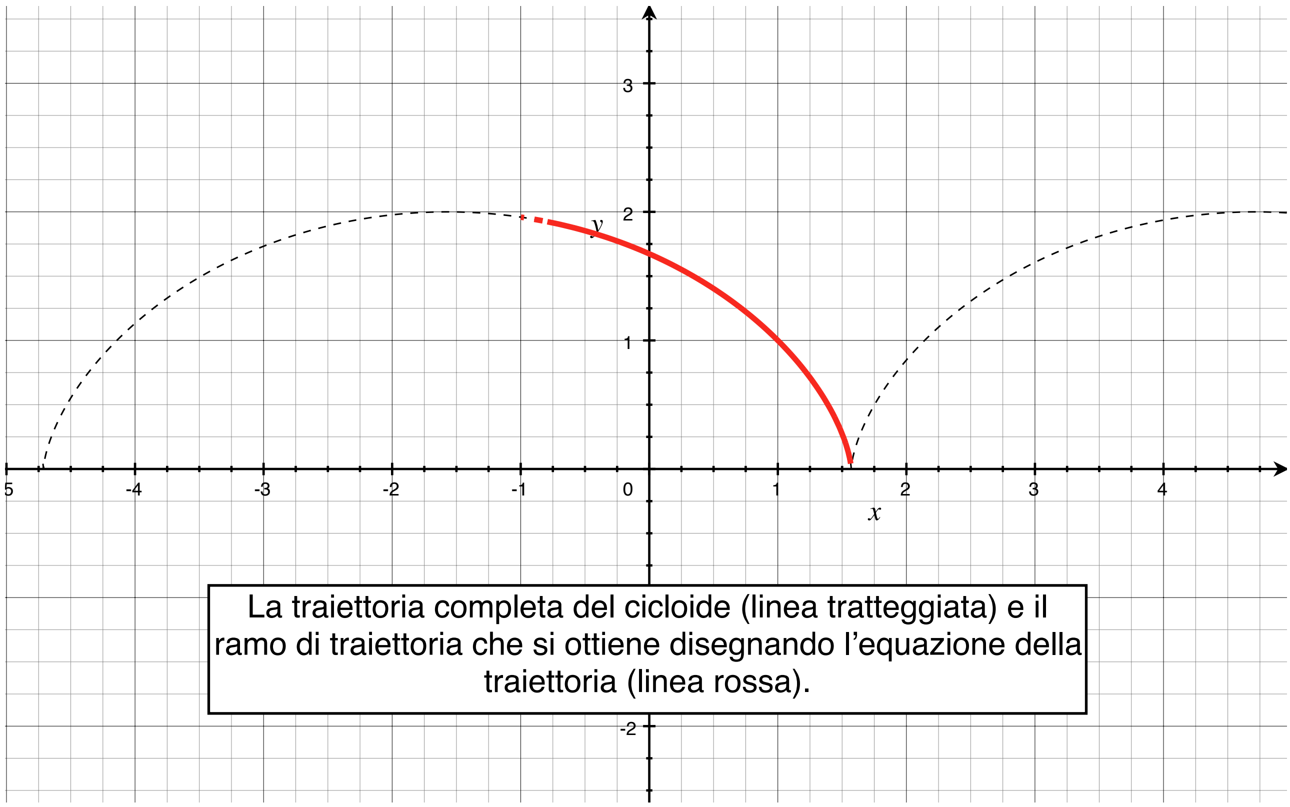
$$x - x_C(0) + R\left[\arcsin \frac{y - R}{R} - \theta(0)\right] = R\sqrt{1 - \frac{(y - R)^2}{R^2}}$$

dove abbiamo sostituito (x, y) al posto di (x_P, y_P). Le costanti $\theta(0)$ e $x_C(0)$ sono arbitrarie e si fissano conoscendo la posizione del punto all'istante $t = 0\,s$. Se ad esempio il punto P si trova in corrispondenza dell'origine all'istante $t = 0\,s$, il raggio del disco è

$R = 1\,m$ ed $\omega = -1\,s^{-1}$ allora $x_C(0) = 0$ e $\theta(0) = -\dfrac{\pi}{2}$ e l'equazione diventa:

$$x + \arcsin(y-1) = \sqrt{1-(y-1)^2}\ .$$

Questa equazione è disegnata in figura (arco rosso). Si noti che l'equazione della traiettoria non dipende da ω.



La traiettoria completa del cicloide (linea tratteggiata) e il ramo di traiettoria che si ottiene disegnando l'equazione della traiettoria (linea rossa).

Cambio del sistema di riferimento

Il sistema di riferimento cartesiano che si sceglie per descrivere la posizione dei punti materiali per adesso è sempre stato fissato in modo arbitrario. La scelta di un sistema di riferimento (SdR) è dovuta alla necessità di descrivere numericamente la posizioni dei punti dello spazio mediante terne ordinate di numeri. Inoltre, quando si è introdotto il concetto di posizione di un punto materiale si è chiaramente specificato che non esiste una definizione assoluta della posizione di un punto. La posizione di un punto è sempre espressa rispetto ad un altro punto di riferimento. Una volta che il SdR è fissato il vettore posizione esprime automaticamente la posizione dei punti rispetto all'origine. Inoltre il SdR è naturalmente associato ad una terna di versori tramite i quali è possibile esprimere tutte le quantità vettoriale utilizzate nella descrizione dei fenomeni fisici.

In due SdR diversi la descrizione di un moto è in generale differente. Ad esempio il vettore posizionale rispetto a due SdR con origini diverse ed assi a due a due paralleli è diverso.

Attenzione però: gli eventi fisici (anche la posizione di un punto materiale nello spazio da considerarsi un evento fisico) si realizzano in modo indipendente dal SdR scelto per descriverli. Il SdR serve solo a darne una rappresentazione in termini matematici quindi SdR diversi conducono a descrizioni differenti dello stesso fenomeno. Ad esempio: se è vero che il concetto di posizione è un concetto relativo (poiché non sarebbe possibile definire la posizione di un corpo senza un origine di riferimento) tuttavia un punto materiale occupa comunque una certa posizione "assoluta" nello spazio <u>indipendentemente</u> dal SdR scelto per descriverla; tale posizione sarà descritta da diversi vettori posizione in SdR differenti.

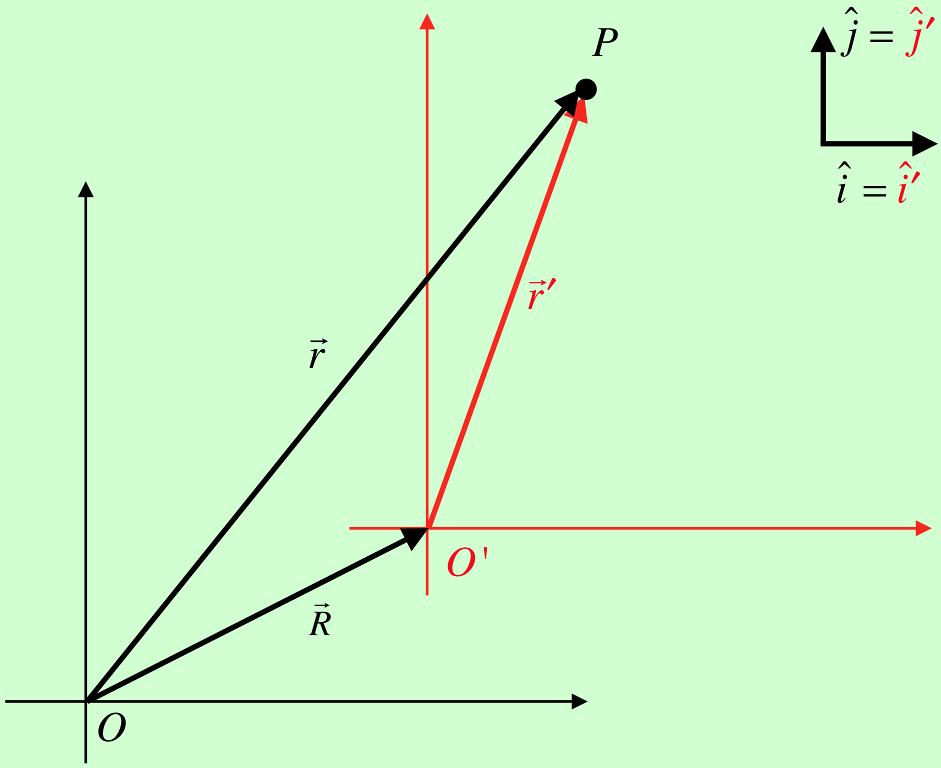
Ma fisicamente che cosa significa fissare un sistema di riferimento? Fissare un SdR è equivalente ad individuare una serie di riferimenti “rigidi” da identificare con l’origine e gli assi del sistema.

Ad esempio un uomo in una stanza può pensare di scegliere le direzioni dei tre assi parallelamente agli spigoli della stanza e l’origine in corrispondenza di un vertice della stanza stessa. Un uomo su una giostra che gira, invece potrebbe fissare l’origine nel centro di rotazione della giostra e gli assi parallelamente a certe direzioni fisse sulla giostra stessa; un uomo sulla carrozza di un treno associa naturalmente origine ed assi rispettivamente ad un punto e a tre direzioni fisse della carrozza.

Da un punto di vista percettivo l’uomo naturalmente è associato ad un sistema di riferimento che ha origine nel punto in cui si trova ed ha gli assi puntati verso tre direzioni fissate dal suo corpo (ad esempio asse x verso destra e parallelo al suolo, asse y in avanti parallelo al suolo, asse z verso l’alto ortogonale al suolo).

In generale vogliamo capire, a livello di cinematica del punto, come cambia la descrizione del moto al variare del SdR. Ci limiteremo allo studio dei due casi più semplici lasciando al corso di Fisica A il caso più generale.

<u>Esempio 1</u>



Se due SdR hanno gli assi a due a due paralleli ma origini differenti (ferme o in moto l'una rispetto all'altra): vale la "solita" relazione $\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}'$ che possiamo scrivere per componenti come

$$x\,\hat{i} + y\,\hat{j} = X\,\hat{i} + x'\,\hat{i}' + Y\,\hat{j} + y'\,\hat{j}' = \left(X + x'\right)\hat{i} + \left(Y + y'\right)\hat{j}$$

dove abbiamo sfruttato il fatto che le direzioni degli assi sono le stesse due a due. Derivando rispetto al tempo e utilizzando il fatto che i versori sono costanti si ottiene:

$$\dot{x}\,\hat{i} + \dot{y}\,\hat{j} = \left(\dot{X} + \dot{x}'\right)\hat{i} + \left(\dot{Y} + \dot{y}'\right)\hat{j}\,.$$

Ma $\vec{v} = \dot{x}\,\hat{i} + \dot{y}\,\hat{j}$ è la velocità del punto nel SdR non accentato, $\vec{V}_{O'} = \dot{X}\,\hat{i} + \dot{Y}\,\hat{j}$ è la velocità dell'origine del SdR accentato misurata nel SdR non accentato, ed infine $\vec{v}' = \dot{x}'\,\hat{i} + \dot{y}'\,\hat{j} = \dot{x}'\,\hat{i}' + \dot{y}'\,\hat{j}'$ è la velocità del punto nel SdR accentato. Riassumendo vale:

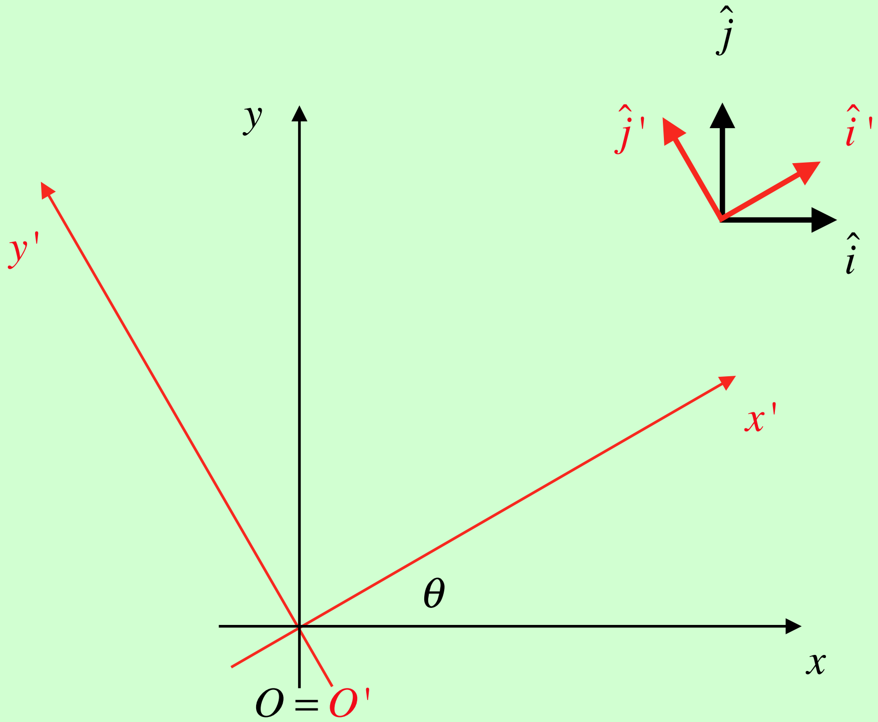
$$\vec{v} = \vec{V}_{O'} + \vec{v}\,'.$$

Derivando questa espressione e ripetendo passaggi analoghi a quelli appena descritti si troverà la seguente relazioni fra le accelerazioni osservate nei due SdR

$$\vec{a} = \vec{A}_{O'} + \vec{a}\,'$$

essendo $\vec{a}$ l'accelerazione nel SdR non accentato, $\vec{A}_{O'}$ l'accelerazione dell'origine del SdR accentato misurata nel SdR non accentato ed infine $\vec{a}\,'$ l'accelerazione del punto misurata nel SdR accentato. Quindi in generale, i due SdR possono misurare accelerazioni differenti se i due SdR si muovono di moto accelerato l'uno rispetto all'altro!

<u>Esempio 2</u>



I due SdR hanno un asse e l'origine comune e ruotano fra di loro intorno all'asse comune. Abbiamo scelto $z = z'$ come asse comune. Se θ è l'angolo che descrive la rotazione allora $\omega = \dot{\theta}$ è la velocità angolare istantanea che descrive la rotazione dell'uno rispetto all'altro. Essa sarà positiva quando il SdR accentato ruota in senso antiorario rispetto a quello non accentato. È piuttosto semplice osservare che vale la seguente relazione fra i versori cartesiani dei due SdR:

$$\begin{cases} \hat{i}' = \cos\theta\,\hat{i} + \sin\theta\,\hat{j} \\ \hat{j}' = -\sin\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j} \end{cases}.$$

Il vettore posizionale di un punto nello spazio (per semplicità mettiamoci sul piano a $z = z' = 0$) sarà lo stesso in entrambi i SdR

$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} = x'\hat{i}' + y'\hat{j}'$. Se deriviamo rispetto al tempo assumendo fermo il SdR non accentato (per cui $\frac{d\hat{i}}{dt} = \frac{d\hat{j}}{dt} = 0$) avremo:

$$\dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} = \dot{x}'\hat{i}' + \dot{y}'\hat{j}' + x'\frac{d\hat{i}'}{dt} + y'\frac{d\hat{j}'}{dt}.$$

Si noti che la relazione fra $\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{i}'$, $\hat{j}'$ è formalmente analoga a quella trovata fra $\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{i}_r$, $\hat{i}_\theta$ quindi varranno relazioni analoghe fra le derivate: $\frac{d\hat{i}'}{dt} = \omega\hat{j}'$ e $\frac{d\hat{j}'}{dt} = -\omega\hat{i}'$. Dunque otteniamo

$$\dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} = \left(\dot{x}'\hat{i}' + \dot{y}'\hat{j}'\right) + \omega\left(x'\hat{j}' - y'\hat{i}'\right)$$

dove $\vec{v} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j}$ è la velocità misurata nel SdR non accentato e $\vec{v}' = \left(\dot{x}'\hat{i}' + \dot{y}'\hat{j}'\right)$ è la velocità misurata nel SdR accentato. Ora deriviamo ulteriormente per ottenere:

$$\ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j} = \left(\ddot{x}'\hat{i}' + \ddot{y}'\hat{j}'\right) + 2\omega\left(\dot{x}'\hat{j}' - \dot{y}'\hat{i}'\right) + \dot{\omega}\left(x'\hat{j}' - y'\hat{i}'\right) - \omega^2\left(x'\hat{i}' + y'\hat{j}'\right)$$

dove $\vec{a} = \ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j}$ è l'accelerazione del punto nel SdR non accentato, $\vec{a}' = \ddot{x}'\hat{i}' + \ddot{y}'\hat{j}'$ è l'accelerazione misurata nel SdR accentato, il contributo $\vec{a}_C = -2\omega\left(\dot{y}'\hat{i}' - \dot{x}'\hat{j}'\right)$ si chiama <u>*accelerazione di Coriolis*</u>, il contributo $\vec{a}_T = -\dot{\omega}\left(y'\hat{i}' - x'\hat{j}'\right) - \omega^2\left(x'\hat{i}' + y'\hat{j}'\right)$ prende il nome di <u>*accelerazione di trascinamento*</u>. Nella parte di trascinamento poi vi è un contributo che si chiama centrifugo ed è $-\omega^2\left(x'\hat{i}' + y'\hat{j}'\right) = -\omega^2\vec{r}'$. Si noti che l'accelerazione di Coriolis dipende dalle componenti della velocità misurata nel SdR accentato mentre l'accelerazione di trascinamento dipende dalle componenti del vettore posizionale. Ricapitolando si ha

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_C + \vec{a}_T \,.$$

Esercizi

1) Un punto si muove nello spazio con vettore posizione $\vec{r}(t) = \left[(2m/s)t + (m/s^2)t^2\right]\hat{i} + \left[(2\,m/s^3)\right]\hat{j} + (2m)\,\mathrm{e}^{-(5/s)t}\hat{k}$ .Calcolare la velocità e l'accelerazione vettoriali istantanee.

2) L'accelerazione di un punto materiale vale

$$\vec{a}(t) = (5m)\,\mathrm{e}^{-(3/s)t}\hat{i} + (4m)\sin\left[(5/s)t\right]\hat{j} - (2m)\cos\left[t/s\right]\hat{k}\,;$$

calcolare il valore della velocità vettoriale in funzione del tempo sapendo che a $t = 0\,s$ la velocità è $\vec{v}(0\,s) = \left(-\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}\right)m/s$. Inoltre determinare l'espressione del vettore posizione sapendo che all'istante $t = 0\,s$ il punto si trova in corrispondenza delle coordinate $(2,1,2)\,m$.