Esercizi di Cinematica

Esercitazioni di Fisica per ingegneri - A.A. 2010-2011

Esercizio 1

Data la legge oraria: $s(t) = a\,t^3 - b\,t + c$ (con $a = 3\,ms^{-3}$, $b = 2\,ms^{-1}$, $c = 1\,m$) calcolare la posizione e la velocità all'istante iniziale ($t = 0s$) ed a quale istante il punto materiale ha velocità nulla.

Soluzione

Determiniamo anzitutto la velocità calcolando la derivata di $s(t)$: $v(t) = \dot{s}(t) = 3at^2 - b$. All'istante iniziale $s(0) = c = 1\,m$ e $v(0\,s) = -b = -2\,m/s$. La velocità, infine, si annulla quando $3at^2 - b = 0 \Rightarrow t = \sqrt{b/(3a)} \simeq 0.47\,s$.

(*Ris:* $1\,m$, $-2\,m/s$, $0.47\,s$)

Esercizio 2

Una macchina parte, accelera uniformemente per $20\,s$ con accelerazione costante pari a $a_0 = 0.5\,m/s^2$, quindi viaggia con velocità costante. Calcolare quanto tempo impieghi per coprire $1\,km$.

Soluzione

Lo spostamento in funzione del tempo per un moto uniformemente accelerato $s(t) = \frac{1}{2}a_0(t-t_0)^2 + v(t_0)(t-t_0) + s(t_0)$ dove $v(t_0)$ e $s(t_0)$ sono rispettivamente il valore della velocit del punto e il suo spostamento a qualche istante t_0. Nel nostro caso l'auto parte da ferma, $v_{t_0} = 0$, ad un certo istante t_0 che possiamo arbitrariamente scegliere uguale a $t_0 = 0\,s$. Il punto di partenza possiamo similmente farlo coincidere con la posizione $s(t_0) = 0$. Quindi:

$$s(t) = \frac{1}{2}a_0 t^2.$$

Dopo $\Delta t = 20\,s$ l'auto ha una posizione $s(\Delta t) = \frac{1}{2}a_0\Delta t^2$. La velocità durante la prima fase del moto è $v(t) = a_0 t$ e dopo $20\,s$ vale $v(\Delta t) = a_0\Delta t$. L'auto quindi viaggia a tale velocità fino a coprire lo spazio complessivo di un chilometro. Lo spazio percorso a velocit costante è

$$s(t) = v(\Delta t)(t-\Delta t) + s(\Delta t) \Rightarrow s(t) = a_0\Delta t(t-\Delta t) + \frac{1}{2}a_0\Delta t^2 = (a_0\Delta t)\,t - \frac{1}{2}a_0\Delta t^2.$$

Percorso un chilometro $\Delta s = 1\,km$ dovrà essere

$$\Delta s = (a_0\Delta t)\,t - \frac{1}{2}a_0\Delta t^2 \Rightarrow t = \frac{\Delta s + \frac{1}{2}a_0\Delta t^2}{a_0\Delta t} = \frac{\Delta s}{a_0\Delta t} + \frac{\Delta t}{2} = 110\,s.$$

(*Ris:* $110\,s$)

Esercizio 3

Il vettore posizione in funzione del tempo di un punto materiale vincolato a muoversi su un piano è:

$$\vec{r}(t) = (At + B)\hat{\imath} + (Ct^3 - Dt^2)\hat{\jmath}$$

con $B = 3\,m$, $C = 1\,m/s^3$, $D = 2\,m/s^2$. Determinare: il valore di A sapendo che il modulo della velocità al tempo iniziale $t = 0\,s$ è pari a $v_0 = 4\,m/s$; i vettori velocità ed accelerazione all'istante $t = 10\,s$; il modulo della componente normale dell'accelerazione a $t = 0\,s$ e a $t = 1\,s$.

Soluzione

Calcoliamo la velocità: $\vec{v}(t) = A\hat{\imath} + (3Ct^2 - 2Dt)\hat{\jmath}$ ed il suo modulo quadro $||\vec{v}(t)||^2 = A^2 + (3Ct^2 - 2Dt)^2$. All'istante $t = 0\,s$ il modulo vale v_0 ovvero

$$||\vec{v}(0\,s)||^2 = A^2 = v_0^2 \Rightarrow A = \pm v_0.$$

Il resto dell'esercizio verrà svolto con la soluzione positiva. L'accelerazione vale: $\vec{a}(t) = (6Ct - 2D)\hat{\jmath}$. È banale calcolare l'accelerazione e la velocità a $t = 10\,s$ sostituendo nelle relative espressioni. Vediamo ora in dettaglio il calcolo della parte normale dell'accelerazione all'istante generico t. La velocità ha sempre la direzione tangente rispetto alla traiettoria. Quindi i versore tangenziale è $\hat{t} = \vec{v}/||\vec{v}||$ ed è una funzione del tempo. Per il caso in questione sarà

$$\hat{t} = \frac{A\hat{\imath} + (3Ct^2 - 2Dt)\hat{\jmath}}{\sqrt{A^2 + (3Ct^2 - 2Dt)^2}}.$$

Il versore normale, $\hat{n}$, sarà perpendicolare a $\hat{t}$ ovvero $\hat{t} \cdot \hat{n} = 0$. È piuttosto semplice trovare un versore perpendicolare a $\hat{t}$: è sufficiente scambiare le componenti di $\hat{t}$ ed invertire il segno di una delle due infatti se $\hat{t} = t_x\hat{\imath} + t_y\hat{\jmath}$ il vettore $\hat{n} = \pm(t_y\hat{\imath} - t_x\hat{\jmath})$ è sicuramente un versore ($t_x^2 + t_y^2 = 1$) e $\hat{t} \cdot \hat{n} = \pm(t_x t_y - t_x t_y) = 0$. Nello specifico, dunque:

$$\hat{n} = \frac{(3Ct^2 - 2Dt)\hat{\imath} - A\hat{\jmath}}{\sqrt{A^2 + (3Ct^2 - 2Dt)^2}}.$$

La parte normale dell'accelerazione la troviamo proiettando $\vec{a}$ lungo $\hat{n}$: $a_n = \vec{a} \cdot \hat{n}$:

$$a_n = \Big[(6Ct - 2D)\hat{\jmath}\Big] \cdot \frac{(3Ct^2 - 2Dt)\hat{\imath} - A\hat{\jmath}}{\sqrt{A^2 + (3Ct^2 - 2Dt)^2}} = \frac{-A(6Ct - 2D)}{\sqrt{A^2 + (3Ct^2 - 2Dt)^2}}$$

e per $t = 0\,s$ vale, ad esempio, $a_n = 2D = 4\,m/s^2$.

(*Ris:* $\pm 4\,m/s$, $56\,m/s^2$, $4\,m/s^2$, $1,94\,m/s^2$)

Esercizio 4

Considerare il moto piano: $\vec{r}(t) = ut\,\hat{\imath} + A\cos\omega t\,\hat{\jmath}$. Determinare: l'equazione della traiettoria; le ascisse dei punti corrispondenti al minimo della velocità; il raggio di curvatura in tali punti.

Soluzione

L'equazione della traiettoria la possiamo facilmente ottenere ricavando il tempo in funzione della coordinate $x(t) = ut$ del vettore posizione: $t = x/u$ e sostituendo nella coordinata $y(t) = A\cos\omega t \Rightarrow y - A\cos\frac{\omega x}{u} = 0$.
La velocità un vettore e quando parliamo del minimo della velocità si deve intendere il minimo del suo modulo. Dunque calcoliamo

$$\vec{v}(t) = u\hat{\imath} - \omega A\sin\omega t$$

come derivata rispetto al tempo del vettore posizione e poi scriviamo il modulo quadro della velocit $||\vec{v}||^2 = u^2 + \omega^2 A^2 \sin^2\omega t$. È evidente che il valore minimo del modulo si ottiene in corrispondenza degli istanti di tempo t_k in cui si annulla il seno ovvero quando $t = t_k = k\frac{\pi}{\omega}$. A tali istanti la coordinar x vale $x(t_k) = k\frac{u\pi}{\omega}$.
Infine determiniamo il raggio di curvatura della traiettoria in tali punti. Determiniamo quindi l'accelerazione

$$\vec{a}(t) = -A\omega^2\cos\omega t\hat{\jmath}$$

derivando le velocità e calcoliamola all'istante t_k. A tali istanti il $\sin\omega t_k$ si annulla e quindi $\cos\omega t_k = \pm 1$. Perciò $\vec{v}(t_k) = u\hat{\imath}$ e $\vec{a}(t_k) = \pm A\omega^2\hat{\jmath}$ e quindi, in corrispondenza del minimo della velocità, velocità ed accelerazione sono perpendicolari. Siccome la velocità definisce la direzione tangente al moto seguirà che l'accelerazione ha solo componente normale e quindi $a_n = A\omega^2$. Il raggio di curvatura ρ si ottiene dalla relazione

$$\rho = \frac{||\vec{v}||^2}{a_n} = \frac{u^2}{A\omega^2}.$$

(*Ris:* $y = A\cos\frac{\omega\,x}{u}$, $k\frac{u\pi}{\omega}$, $\frac{u^2}{\omega^2 A}$)

Esercizio 5

Un punto materiale si muove sulla parabola $y = -Ax^2 + B$ (con $A = 2\,m^{-1}$ e $B = 50\,m$) partendo da terra ($y(0) = 0\,m$). Sapendo che il moto del punto è uniformemente decelerato con $\vec{a} = -a_0\,\hat{\jmath}$, $a_0 = 2\,m/s^2$. Calcolare la velocità iniziale del corpo.

Soluzione

La traiettoria del punto è una parabola con concavità rivolta verso il basso e con l'asse di simmetria coincidente con l'asse y. Il punto parte da $y = 0\,m$ e quindi $x = \pm\sqrt{B/A}$. Scegliamo il punto di partenza in $(-B/A, 0\,m)$. Il moto è accelerato con accelerazione $\vec{a} = -a_0\hat{\jmath}$. Il vettore posizione che descrive il moto è $\vec{r} = x(t)\hat{\imath} + y(t)\hat{\jmath}$. Derivandolo otteniamo l'espressione per la velocità $\vec{v}(t) = \dot{x}\hat{\imath} + \dot{y}\hat{\jmath}$ e per l'accelerazione $\vec{a} = \ddot{x}\hat{\imath} + \ddot{y}\hat{\jmath}$. Ma l'accelerazione è nota e vale

$$\ddot{x}\hat{\imath} + \ddot{y}\hat{\jmath} = -a_0\hat{\jmath}.$$

Dall'uguaglianza di due vettori segue l'uguaglianza delle componenti quindi $\ddot{x} = 0$ e $\ddot{y} = -a_0$. Il moto è quindi la sovrapposizione di un moto uniforme nella direzione di x e di un moto uniformemente accelerato nella direzione y. Sarà quindi:

$$x(t) = \dot{x}(0)t + x(0)$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}a_0t^2 + \dot{y}(0)t + y(0)$$

dove $\dot{x}(0)$ e $\dot{y}(0)$ sono le componenti iniziali del vettore velocità (che devono essere calcolate) e $x(0), y(0)$ sono le coordinate del punto all'istante iniziale ovvero $-\sqrt{B/A}, 0$. Per determinare le componenti della velocità iniziale richiediamo che la soluzione per $x(t)$ ed $y(t)$ abbia altri due punti in comune con la traiettoria nota. In particolare richiediamo che la quota massima $y(t)$ sia proprio B e che il punto di ricaduta abbia coordinate $B/A, 0$.
Per determinare la quota massima cerchiamo il massimo di $y(t)$ derivando rispetto al tempo:

$$\dot{y} = -a_0t + \dot{y}(0) = 0 \Rightarrow t_M = \frac{\dot{y}(0)}{a_0} \Rightarrow y_{max} = y(t_M) = -\frac{1}{2}a_0\left(\frac{\dot{y}(0)}{a_0}\right)^2 + \dot{y}(0)\frac{\dot{y}(0)}{a_0} = \frac{\dot{y}(0)^2}{2a_0}$$

e richiediamo che questa quota sia uguale a B:

$$\Rightarrow \frac{\dot{y}(0)^2}{2a_0} = B \Rightarrow \dot{y}(0) = \sqrt{2a_0B}.$$

Poi determiniamo il punto di ricaduta del corpo: le coordinate di questo punto le determiniamo calcolando l'istante di ricaduta t_r che è tale che $y(t_r) = 0\,m$ ovvero

$$y(t_r) = -\frac{1}{2}a_0t_r^2 + \dot{y}(0)t_r = 0 \Rightarrow t_r = \frac{2\dot{y}(0)}{a_0}$$

ed infine sostituendo in $x(t)$

$$x(t_r) = \dot{x}(0)\frac{2\dot{y}(0)}{a_0} - \sqrt{\frac{B}{A}} = \sqrt{\frac{B}{A}} \Rightarrow \dot{x}(0)\frac{2\sqrt{2a_0B}}{a_0} = 2\sqrt{\frac{B}{A}} \Rightarrow \dot{x}(0) = \sqrt{\frac{a_0}{2A}}.$$

Il problema è quindi risolto.

(*Ris:* $12.5\,\hat{\imath} + 14.14\,\hat{\jmath}$)

Esercizio 6

Un punto materiale pesante di massa $m = 1.20\,kg$ è vincolato a muoversi nel piano verticale xy lungo una guida priva di attrito. All'istante iniziale si trova nel punto di coordinate $x = 0m$, $y = 1.40\,m$ con velocità nulla. La guida è tangente all'asse delle ordinate nel punto iniziale. La posizione della particella in funzione del tempo è data dall'espressione: $\vec{r}(t) = (A\omega t - A\sin\omega t)\hat{\imath} + (A + A\cos\omega t)\hat{\jmath}$. Calcolare: il valore delle costanti A e ω; la coordinata x del punto in cui la particella tocca il suolo ($y = 0\,m$), il modulo del vettore velocità in tale punto ed il tempo necessario a raggiungerlo.

(*Ris:* $0.70\,m$, $3.74\,s^{-1}$, $2.20\,m$, $5.24\,m/s$, $0.84\,s$)

Esercizio 7

Un punto materiale è vincolato a muoversi su una circonferenza di raggio $R = 1\,m$. Lo spostamento rispetto ad un'origine arbitraria scelta sulla traiettoria è $s(t) = At^2$ con $A = 5\,m \cdot s^{-2}$. Determinare a quale istante l'accelerazione forma un angolo di $\pi/4$ con la velocità.

Soluzione

È comodo descrivere il moto circolare mediante scegliendo un sistema di riferimento cartesiano con origine al centro della traiettoria del moto e mediante i versori ortogonali $\hat{i}_r = \cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{j}$ e $\hat{i}_\theta = -\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j}$ essendo θ l'angolo formato dal vettore posizione e dall'asse x. L'angolo θ è ovviamente un funzione del tempo. Valgono (si possono facilmente verificare dalla definizione dei due versori) le seguenti relazioni:

$$\frac{d\hat{i}_r}{dt} = \dot{\theta}\hat{i}_\theta \quad \frac{d\hat{i}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\hat{i}_r.$$

Il vettore posizione è $\vec{r} = R\hat{i}_r$ e derivandolo otteniamo la velocità $\vec{v} = R\frac{d\hat{i}_r}{dt} = R\dot{\theta}\,\hat{i}_\theta$ e l'accelerazione $\vec{a} = R\ddot{\theta}\,\hat{i}_\theta - R\dot{\theta}^2\,\hat{i}_r$. All'istante in cui accelerazione e velocità formano un angolo di 45° vale la seguente relazione:

$$\vec{v}\cdot\vec{a} = ||\vec{v}||||\vec{a}||\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}R\dot{\theta}\sqrt{(R\ddot{\theta})^2 + (R\dot{\theta}^2)^2}$$

ma il prodotto scalare si può anche scrivere esplicitamente

$$\vec{v}\cdot\vec{a} = \left(R\dot{\theta}\,\hat{i}_\theta\right)\cdot\left(R\ddot{\theta}\,\hat{i}_\theta - R\dot{\theta}^2\,\hat{i}_r\right) = R^2\dot{\theta}\ddot{\theta}.$$

Vale quindi l'uguaglianza

$$\frac{\sqrt{2}}{2}R\dot{\theta}\sqrt{(R\ddot{\theta})^2 + (R\dot{\theta}^2)^2} = R^2\dot{\theta}\ddot{\theta} \Rightarrow \sqrt{1 + \left(\frac{\dot{\theta}^2}{\ddot{\theta}}\right)^2} = \sqrt{2} \Rightarrow \frac{\dot{\theta}^2}{\ddot{\theta}} = 1.$$

L'angolo θ è l'angolo sotteso dallo spostamento $s(t)$ sulla circonferenza e quindi vale la relazione geometrica $\theta = s(t)/R = At^2/R$. Derivando

$$\dot{\theta} = \frac{2At}{R} \quad \ddot{\theta} = \frac{2A}{R} \Rightarrow \frac{\dot{\theta}^2}{\ddot{\theta}} = 1 = \frac{4A^2t^2R}{R^2 2A} = \frac{2At^2}{R} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{R}{2A}}.$$

(*Ris:* $1/\sqrt{10}\,s$)

Esercizio 8

Un'automobile viaggia alla velocità di $v = 97\,km/h$. Il diametro delle ruote è pari a $d = 76\,cm$. Determinare: la velocità angolare ω delle ruote, il periodo T e la frequenza ν di rotazione delle stesse, il modulo dell'accelerazione a di un punto sul bordo di una ruota.

Soluzione

Il centro delle ruote dell'auto si muove alla stessa velocità dell'auto. Se le ruote rotolano senza strisciare lo spostamento Δs del centro di una qualsiasi delle ruote in un intervallo di tempo Δt è uguale al raggio delle ruote per l'angolo $\Delta\theta$ di cui sono ruotate in Δt ovvero $\Delta s = \Delta\theta\, d/2$. Dividendo questa relazione per Δt ed essendo la velocità dell'auto costante di ottiene

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{d\Delta\theta}{2\Delta t} = v$$

ma $\omega = \Delta\theta/\Delta t$ quindi

$$\frac{d\omega}{2} = v \Rightarrow \omega = \frac{2v}{d}.$$

Il periodo sarà $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi d}{v}$ e la frequenza è $\nu = T^{-1} = \frac{v}{\pi d}$. Infine la posizione di un punto P sul bordo di una ruota si può descrivere con un vettore posizione che è la somma del vettore posizione del centro della ruota C più il vettore posizione del punto rispetto al centro della ruota:

$$\vec{r}_P = \vec{r}_C + \vec{r}_{CP}$$

dove $\vec{r}_C$ segue il centro e quindi descrive un moto a velocità costante mentre $\vec{r}_{CP}$ è un vettore che ruota descrivendo un moto circolare uniforme. La derivata seconda di $\vec{r}_P$ è l'accelerazione che stiamo cercando:

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}}_P = \ddot{\vec{r}}_C + \ddot{\vec{r}}_{CP} = 0 + \vec{a}_n$$

dove $\vec{a}_n$ è l'accelerazione centripeta di un moto circolare uniforme con velocità v. Quindi il suo modulo (che è uguale al modulo dell'accelerazione di P) vale $||\vec{a}_P|| = \frac{v^2}{d/2}$.

(*Ris:* $\omega = 70.9\, rad/s$, $T = 0.089\, s$, $\nu = 11.2\, Hz$, $a = 1910\, m/s^2$)

Esercizio 9

Il vettore posizione di un moto vario è $\vec{r}(t) = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath}$ con $x = a\cosh\omega t$ e $y = b\sinh\omega t$. Determinare l'equazione della traiettoria $f(x,y) = 0$.

Soluzione

L'equazione della traiettoria la otteniamo notando che vale la seguente relazione

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$$

Quindi, in questo caso, dovrà essere

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 - 1 = 0.$$

Esercizio 10

Un aeroplano che viaggia con una velocità di $v = 800\, km/h$ ad un certo istante vira per invertire la rotta. Sapendo che la traiettoria descritta durante la virata è quella di una semicirconferenza e che il pilota, durante la manovra, è sottoposto ad un'accelerazione di $5g$ determinare quanto impiega per completare l'inversione.

Soluzione

Durante la virata il moto è circolare uniforme. Infatti la traiettoria che segue l'aereo è per ipotesi un arco di circonferenza (percorso a velocità costante). L'unica accelerazione cui è sottoposto l'aereo è preciò quella centripeta e in modulo vale $a_n = v^2/R$. Vale quindi:

$$a_n = 5g = \frac{v^2}{R} \Rightarrow R = \frac{v^2}{5g}.$$

La misura della semicirconferenza descritta pervertire rotta è $\Delta s = \pi R = \frac{\pi v^2}{5g}$ l'inversione avviene con velocità nota v. Quindi

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = v \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta s}{v} = \pi R = \frac{\pi v}{5g}.$$

(*Ris:* $14.23\,s$)

Esercizio 11

Un punto materiale è vincolato a muoversi su una guida rettilinea che ha un estremo incernierato nell'origine di un sistema di riferimento cartesiano. Il moto del punto sulla guida (relativamente ad essa) è uniforme (velocità costante v_n nella direzione della guida) mentre la guida ruota con velocità angolare costante ω introno all'origine. Sapendo che all'istante $t = 0$ il punto materiale si trova nell'origine e la guida è disposta sull'asse positivo delle ascisse determinare la legge oraria del punto materiale in forma cartesiana. Determinare infine l'equazione che esprime il vincolo necessario affinchè ad un certo istante la componente lungo $\hat{j}$ dell'accelerazione del punto sia nulla.

Soluzione

La direzione della guida è semplicemente quella del versore $\hat{i}_r = \cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{j}$ con $\theta(t) = \omega t$ (visto che a $t = 0$ l'angolo fra la guida e l'asse x è zero). Il punto si muove nel verso di $\hat{i}_r$ con velocità v_n. La sua posizione è $\vec{r} = r(t)\hat{i}_r$. Derivando rispetto al tempo questa espressione otteniamo la sua velocità:

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{i}_r + r\dot{\theta}\,\hat{i}_\theta$$

dove $\dot{r} = v_n$. Essendo v_n costante la precedete condizione per $\dot{r}$ indica un moto uniforme nella direzione $\hat{i}_r$ e quindi

$$r(t) = v_n\,t + r(0)$$

dove, per le ipotesi, $r(0) = 0$ e quindi $r(t) = v_n\,t$. Quindi il vettore posizione in forma cartesiana è

$$\vec{r} = v_n\,t\left(\cos\omega t\,\hat{i} + \sin\omega t\,\hat{j}\right).$$

Determiniamo ora l'accelerazione:

$$\vec{v} = v_n\left(\cos\omega t\,\hat{i} + \sin\omega t\,\hat{j}\right) + v_n\,t\,\omega\left(-\sin\omega t\,\hat{i} + \cos\omega t\,\hat{j}\right)$$

$$\vec{a} = v_n\,\omega\left(-\sin\omega t\,\hat{i} + \cos\omega t\,\hat{j}\right) - v_n\,t\,\omega^2\left(\cos\omega t\,\hat{i} + \sin\omega t\,\hat{j}\right);$$

la sua componente nella direzione $\hat{j}$ è nulla se viene soddisfatta la condizione

$$a_y = v_n\,\omega\,(\cos\omega t) - v_n\,t\,\omega^2\,(\sin\omega t) = 0 \Rightarrow (\cos\omega t) - \,t\,\omega\,(\sin\omega t) = 0 \Rightarrow \tan\omega t = \frac{1}{\omega t}.$$

Esercizio 12

Due macchine partono nello stesso istante una da Milano con velocità v_M e l'altra da Roma con velocità v_R (sia d_{MR} la distanza da Milano a Roma). Determinare il punto d'incontro delle due vetture.

(*Ris:* $\Delta s_M = \frac{v_M}{v_M+v_R} d_{MR}$)

Esercizio 13

Un treno si muove con accelerazione costante per un tratto lungo L. All'inizio la velocità ha modulo v_0. Calcolare il tempo impiegato dal treno a percorrere il tratto L ed il modulo della velocità finale.

Esercizio 14

Un ciclista procede con velocità costante v_0 e supera un motociclista fermo. quando il ciclista è arrivato ad una distanza d, il motociclista parte e lo insegue con accelerazione costante a fino a raggiungerlo. Determinare il tempo impiegato dal motociclista per raggiungere il ciclista ed il modulo della velocità del motociclista nell'istante del sorpasso.

Esercizio 15

Si determini l'equazione della traiettoria del cicloide (un punto materiale sul bordo di un disco che rotola senza strisciare con velocità angolare ω costante) e si calcoli il raggio di curvatura in corrispondenza delle posizioni con la massima distanza da terra.

Soluzione

Descriviamo la posizione del centro del disco con il vettore $\vec{r}_C$ e la posizione relativa al centro del disco di un punto P sul bordo con il vettore $\vec{r}_{CP}$. Fissiamo un sistema di riferimento cartesiano con asse x parallelo ed asse y disposto verticalmente. Se il centro del disco si muove di moto uniforme da destra a sinistra ad una quota da terra pari al raggio R del disco allora

$$\vec{r}_C = -v\, t\, \hat{i} + R\, \hat{j}$$

mentre il vettore $\vec{r}_{CP}$ ruota di moto circolare con velocità angolare $\omega = v/R$

$$\vec{r}_{CP} = R\, \hat{i}_r$$

con $\hat{i}_r = \cos\omega t\, \hat{i} + \sin\omega t\, \hat{j}$. Il vettore posizione di P è semplicemente

$$\vec{r}_P = \vec{r}_C + \vec{r}_{CP} = -v\, t\, \hat{i} + R\, \hat{j} + R\, \hat{i}_r.$$

Calcoliamo velocità ed accelerazione del punto:

$$\vec{v}_P = -v\, \hat{i} + R\omega\, \hat{i}_\theta$$

$$\vec{a}_P = -R\omega^2\, \hat{i}_r.$$

Quando P raggiunge la quota massima $\hat{i}_r = \hat{j} \Rightarrow \sin\omega t_M = 1 \Rightarrow t_M = \frac{\pi}{2\omega}$. Corrispondentemente $\hat{i}_\theta = -\,\hat{i}$. Determiniamo accelerazione e velocità a questo istante:

$$\vec{v}_P(t_M) = -(v + R\omega)\, \hat{i} = -2R\omega\, \hat{i}$$

$$\vec{a}_P(t_M) = -R\omega^2\, \hat{j}$$

sono ortogonali quindi l'accelerazione è normale. Il raggio di curvatura della traiettoria sarà

$$\rho = \frac{||\vec{v}_P||^2}{||\vec{a}_P||} = \frac{4R^{2\omega^2}}{R\omega^2} = 4R.$$

Esercizi d'esame - avanzati

Esercizio 1

Un punto materiale, sul piano cartesiano, segue la traiettoria $y = Ax + B$ con $A = 5$ e $B = -2\,m$. Sapendo che la legge oraria espressa come spostamento sulla traiettoria in funzione del tempo (nel semipiano delle ascisse positive)è $s(t) = kt^2$ con $k = 2\,m/s^2$ e avendo scelto $s(0) = 0$ in corrispondenza del punto $P : (0, B)$ determinare la legge oraria in forma cartesiana.

Soluzione

Il vettore posizione del punto sulla traiettoria è $\vec{r} = x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath}$ con $y = Ax + B$ quindi $\vec{r} = x\,\hat{\imath} + (Ax + B)\,\hat{\jmath}$. La velocità vettoriale è $\vec{v} = \dot{x}\,\hat{\imath} + A\dot{x}\,\hat{\jmath}$. Dividendo il vettore velocità per il suo modulo si ottiene un versiere tangente alla traiettoria:

$$\hat{t} = \frac{\vec{v}}{||\vec{v}||} = \frac{\dot{x}\,\hat{\imath} + A\dot{x}\,\hat{\jmath}}{\sqrt{\dot{x}^2 + A^2\dot{x}^2}} = \pm\frac{\hat{\imath} + A\,\hat{\jmath}}{\sqrt{1 + A^2}}.$$

Scegliamo la soluzione con segno positiva che è diretta nel verso delle ascisse positive. La velocità vettoriale si potr'a anche scrivere come

$$\vec{v} = \dot{s}\,\hat{t} = 2kt\frac{\hat{\imath} + A\,\hat{\jmath}}{\sqrt{1 + A^2}}$$

e può essere facilmente integrata per ottenere $\vec{r}$:

$$\dot{x} = \frac{2kt}{\sqrt{1 + A^2}} \Rightarrow x(t) = \frac{kt^2}{\sqrt{1 + A^2}} + x(0) = \frac{kt^2}{\sqrt{1 + A^2}}$$

poichè $x(0) = x_P = 0$ e

$$\dot{y} = \frac{2kAt}{\sqrt{1 + A^2}} \Rightarrow t(t) = \frac{kAt^2}{\sqrt{1 + A^2}} + y(0) = \frac{kAt^2}{\sqrt{1 + A^2}} + B$$

poichè $y(0) = y_P = B$. Dunque

$$\vec{r}(t) = \left(\frac{kt^2}{\sqrt{1 + A^2}}\right)\,\hat{\imath} + \left(\frac{kAt^2}{\sqrt{1 + A^2}} + B\right)\,\hat{\jmath}.$$

(*Forlì 07/02/2003 - Ris:* $\vec{r}(t) = 0.392\,t^2\,\hat{\imath} + (1.961\,t^2 - 2)\hat{\jmath}$)

Esercizio 2

Un punto materiale si muove con un'accelerazione $\vec{a}(t) = A\exp(-kt)\hat{\imath} + B\hat{\jmath}$ essendo $A = -2\,m/s^2$, $k = 1\,s^{-1}$, $B = -9.8\,m/s^2$. Determinare l'equazione della traiettoria sapendo che il corpo parte con velocità $\vec{v}(0) = (2\hat{\imath})m/s$ dal punto $\vec{r}(0) = 1000\hat{\jmath}\,m$. Determinare inoltre il raggio di curvatura a $t = 0$.

Soluzione

Integriamo l'accelerazione componente per componente:

$$\ddot{x} = A\exp(-kt) \Rightarrow \dot{x} = -\frac{A}{k}\exp(-kt) + c_1 \Rightarrow x(t) = \frac{A}{k^2}\exp(-kt) + c_1 t + c_2$$

$$\ddot{y} = B \Rightarrow \dot{y} = Bt + \dot{y}(0) \Rightarrow y(t) = \frac{1}{2}Bt^2 + \dot{y}(0)t + y(0)$$

e fissiamo le condizioni iniziali del moto:

$$x(0) = \frac{A}{k^2} + c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = x(0) - \frac{A}{k^2} = -\frac{A}{k^2}$$

$$\dot{x}(0) = -\frac{A}{k} + c_1 = v_0 \Rightarrow c_1 = v_0 + \frac{A}{k}$$

$$x(t) = \frac{A}{k^2}\exp(-kt) + c_1 t + c_2 \Rightarrow x(t) = \frac{A}{k^2}\exp(-kt) + \left(v_0 + \frac{A}{k}\right)t - \frac{A}{k^2}$$

$$y(t) = \frac{1}{2}Bt^2 + r_0$$

con $r_0 = 1000\,m$ e $v_0 = 2\,m/s$. Per trovare la traiettoria invertiamo la relazione per $x(t)$ notando che $v_0 + \frac{A}{k} = 0$:

$$x(t) = \frac{A}{k^2}\left(\exp(-kt) - 1\right) \Rightarrow \frac{k^2 x}{A} + 1 = \exp\left(-kt\right) \Rightarrow t = -k^{-1}\ln\left(\frac{k^2 x}{A} + 1\right)$$

e sostituiamo nella espressione per y:

$$y(t) = \frac{1}{2}Bk^{-2}\ln^2\left(\frac{k^2 x}{A} + 1\right) + r_0.$$

(*Forlì 07/02/2003 - Ris:* $y = -4.9\left[\ln\left(1 - 0.5\,x\right)\right]^2 + 1000,\ R = 4.082\,10^{-1}m$)

Esercizio 3

Un punto materiale è vincolato a muoversi senza attrito lungo una guida rettilinea. Al tempo $t = 0$ il punto materiale si trova in quiete nell'origine scelta. Se il punto accelera con accelerazione $a(t) = kt$, dove $k = 2\,m/s^2$, trovare la velocità e lo spazio percorso in funzione del tempo.

(*Forlì 07/02/2003 - Ris:* $v(t) = t^2\,m/s,\ s(t) = 1/3\,t^3\,m$)

Esercizio 4

Un punto materiale si muove su di una traiettoria circolare di raggio $r = 2\,m$ con la legge oraria $s(t) = kt^2$, con $k = 2\,m/s^2$. Calcolare la componente tangenziale e la componente normale dell'accelerazione in funzione del tempo.

(*Forlì 07/02/2003 - Ris:* $a_t = 4\,m/s^2,\ a_n = 8t^2\,m/s^2$)

Esercizio 5

Le equazioni parametriche cartesiane del moto di un punto materiale sono: $x = k_1 - k_2 \cos\omega t$, $y = k_3 + k_4 \sin\omega t$, con $k_1 = 2\,m$, $k_2 = 3\,m$, $k_3 = 4\,m$, $k_4 = 5\,m$, $\omega = 10\,s^{-1}$. Determinare l'equazione della traiettoria.

(*Forlì 28/03/2003 - Ris:* $k_4^2(x-k_1)^2 + k_2^2(y-k_3)^2 = k_2^2 k_4^2$)

Esercizio 6

Il moto di un punto materiale vincolato su un piano verticale xy è descritto dall'equazione $\vec{r}(t) = \{R[\cos(\alpha_0 - \omega\, t) + \omega\, t] + x_0\}\,\hat{\imath} + R[\sin(\alpha_0 - \omega\, t) + 1]\,\hat{\jmath}$ in cui $R = \sqrt{\xi}\,m$ e $\omega = \frac{10\,\pi}{\xi}\,s^{-1}$. Calcolare:

1) le costanti α_0 ed x_0 in modo che a $t = \xi/20\,s$ il punto passi per l'origine;

2) il raggio di curvatura della traiettoria nell'istante in cui è massima la distanza del punto dalla retta $y = 0\,m$.

(*Forlì 19/06/2003 - Ris:* $\alpha_0 = 2(k+1)\pi$, $x_0 = -\pi\sqrt{\xi}/2$, $r_c = 4\sqrt{xi}$)

Esercizio 7

Il moto di un punto materiale è descritto dall'equazione $y = a\,m^{-1}\,x^2$ (con $a > 0$). Sapendo che il punto materiale parte da $P(-2\,m, 4a\,m)$ con una velocità, in modulo, pari a $v_0 = \frac{\xi}{100}\,m/s$ e che il raggio di curvatura della traiettoria, nel punto $x = 0$, è uguale a $R = \sqrt{\xi}\,m$ calcolare a e la componente della velocità del punto lungo x (si supponga il moto accelerato nella direzione y).

Soluzione

Se il moto è uniformemente accelerato nella direzione y allora la legge oraria delle due coordinate sarà

$$x(t) = \dot{x}(t_0)(t - t_0) + x(t_0)$$
$$y(t) = \frac{1}{2}a_0(t - t_0)^2 + \dot{y}(t_0)(t - t_0) + y(t_0).$$

Il punto parte da P (ad esempio a $t_0 = 0$) quindi $x(t_0) = x_P = -2m$ e $y(t_0) = y_P = 4a\,m$. Le coordinate quindi si semplificano ed è possibile ottenere l'equazione della traiettoria

$$x(t) = \dot{x}(0)t + x_P \Rightarrow t = \frac{x - x_P}{\dot{x}(0)}$$

$$y(t) = \frac{1}{2}a_0 t^2 + \dot{y}(0)t + y_P \Rightarrow y = \frac{1}{2}a_0\left(\frac{x - x_P}{\dot{x}(0)}\right)^2 + \dot{y}(0)\frac{x - x_P}{\dot{x}(0)} + y_P \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \left(\frac{a_0}{2\dot{x}(0)^2}\right)x^2 + \left[\frac{\dot{y}(0)}{\dot{x}(0)} - a_0\left(\frac{x_P}{\dot{x}(0)^2}\right)\right]x + \left[y_P - \dot{y}(0)\frac{x_P}{\dot{x}(0)} + \frac{1}{2}a_0\left(\frac{x_P}{\dot{x}(0)}\right)^2\right].$$

Confrontandola con l'equazione nota in ipotesi si ricavano i seguenti vincoli:

$$\left(\frac{a_0}{2\dot{x}(0)^2}\right) = a \Rightarrow a_0 = 2\dot{x}(0)^2 a$$

$$\left[\frac{\dot{y}(0)}{\dot{x}(0)} - a_0\left(\frac{x_P}{\dot{x}(0)^2}\right)\right] = 0 \Rightarrow \dot{y}(0) = a_0\frac{x_P}{\dot{x}(0)} \Rightarrow \dot{y}(0) = 2a\dot{x}(0)x_P$$

$$\left[y_P - \dot{y}(0)\frac{x_P}{\dot{x}(0)} + \frac{1}{2}a_0\left(\frac{x_P}{\dot{x}(0)}\right)^2\right] = 0 \Rightarrow y_P - ax_P^2 = 0.$$

All'istante $t = 0$ il modulo della velocità è noto: $\dot{x}(0)^2 + \dot{y}(0)^2 = v_0^2$ e sostituendo l'espressione trovata per $\dot{y}(0)$ si ottiene

$$\dot{x}(0)^2 + (2a\dot{x}(0)x_P)^2 = v_0^2 \Rightarrow \dot{x}(0)^2 = \frac{v_0^2}{1+4a^2x_P^2} \Rightarrow \dot{x}(0) = v_0\sqrt{\frac{1}{1+4a^2x_P^2}}$$

ed inoltre

$$\dot{y}(0) = 2a\,x_P v_0\sqrt{\frac{1}{1+4a^2x_P^2}}$$

$$a_0 = 2\,a\,\frac{v_0^2}{1+4a^2x_P^2}$$

Dunque sono determinate (in funzione di a) tutte le condizioni iniziali necessarie per esprimere $x(t)$ ed $y(t)$ Velocità ed accelerazioni hanno rispettivamente componenti

$$\dot{x}(t) = \dot{x}(0)$$

$$\dot{y}(t) = a_0 t + \dot{y}(0)$$

e

$$\ddot{x}(t) = 0$$

$$\ddot{y}(t) = a_0.$$

Quando il punto materiale transita per $x = 0$ la tangente alla traiettoria è parallela all'asse x; quindi la velocità in quel punto è semplicemente $\dot{x}(0)$. Inoltre, essendo il moto accelerato nella direzione y l'accelerazione è perpendicolare alla velocità in quel punto ed è dunque normale. Quindi (se $a > 0$)

$$\frac{\dot{x}(0)^2}{R} = a_0 \Rightarrow \frac{\dot{x}(0)^2}{R} = 2\dot{x}(0)^2 a \Rightarrow a = \frac{1}{2R}.$$

Per finire

$$\dot{x}(0) = v_0\sqrt{\frac{1}{1+\frac{x_P^2}{R^2}}}.$$

(*Forlì 01/07/2003 - Ris:* $a = 1/2\sqrt{\xi}\,m^{-1}$, $v_x = \sqrt{\xi^3\cdot 10^{-4}/(\xi+4)}\,m/s$)

Esercizio 8

Un punto materiale viene lanciato dalla superficie terrestre con velocità $v_0 = 100\,m/s$, a un angolo di $\theta = (9\xi/100)^\circ$ rispetto alla verticale. Calcolare il raggio di curvatura del punto materiale subito dopo il lancio.

(*Forlì 19/09/2003 - Ris:* $r_c = v_0^2/[g\sin(9\xi/100)]$)

Esercizio 9

Le equazioni del moto in forma cartesiana per un proiettile sono date da $\ddot{x} = -k\dot{x}$ e $\ddot{y} = -g$ essendo $k = \xi \cdot 10^{-4}\, s^{-1}$ e g l'accelerazione di gravità. Sapendo che il proiettile parte dal suolo ($x(0) = 0\, m$ ed $y(0) = 0\, m$) con una velocità in modulo pari a $v_0 = 10\sqrt{2}\, m/s$ inclinata di 45° rispetto a terra scrivere l'equazione della traiettoria in forma implicita e determinare il raggio di curvatura della stessa nel punto di massima distanza da terra.

(*Forlì 15/12/2003 - Ris:* $y = -g/2k^2 \ln^2(1 - kx/\alpha) - \alpha/k \ln(1 - kx/\alpha)$, $r_c = \alpha^2 \exp(-2k\alpha/g)/g$)

Esercizio 10

Due automobili, partendo dalla stessa posizione, percorrono un circuito di lunghezza L con velocità costante v_1 e v_2 rispettivamente ($v_1 > v_2$). Determinare la relazione tra le velocità affinche la prima automobile doppi la seconda dopo un giro e tre quarti.

(*Bologna 11/09/2006 - Ris:* $v_1 = 7/3\, v_2$)

Esercizio 11

Un punto si muove nel piano secondo la legge oraria (in forma cartesiana) $x = \alpha t$, $y = \frac{1}{2}\beta t^2$. Esprimere, in funzione del tempo, l'angolo che l'accelerazione del punto materiale forma con la direzione del moto.

(*Bologna 21/03/2006 - Ris:* $\arccos\left(\frac{\beta t}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2 t^2}}\right)$)

Esercizio 12

Un punto materiale si muove lungo una traiettoria curvilinea secondo la legge oraria $s(t) = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \beta t + \gamma$. Calcolare il raggio di curvatura della traiettoria nel punto P nell'ipotesi che il modulo dell'accelerazione in P valga a_0.

(*Bologna 19/07/2005 - Ris:* $r = \frac{(\alpha t_P+\beta)^2}{\sqrt{a_0^2-\alpha^2}}$)