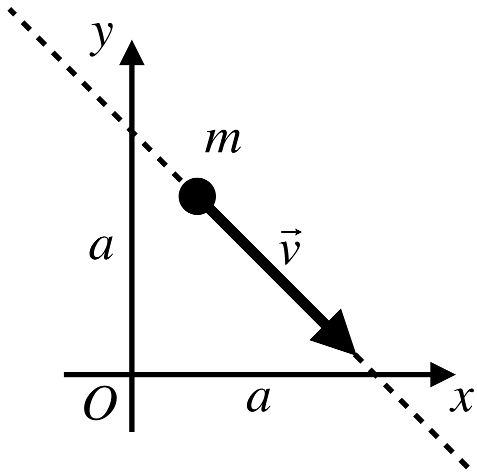
Esercizio 1



Esprimere il momento della quantità di moto del punto materiale nel sistema di riferimento indicato in figura assumendo l'origine O come polo di riduzione. (Sia a la distanza fra le intersezioni della traiettoria del punto, linea tratteggiata, con gli assi e l'origine)

Soluzione

Il vettore velocità si può esprimere mediante una combinazione dei versori cartesiani $\hat{i}$ e $\hat{j}$ come

$$\vec{v} = v_x\,\hat{i} + v_y\,\hat{j} = \left(\vec{v}\cdot\hat{i}\right)\hat{i} + \left(\vec{v}\cdot\hat{j}\right)\hat{j} = \|\vec{v}\|\left(\cos\frac{\pi}{4}\right)\hat{i} + \|\vec{v}\|\left(\cos\frac{3\pi}{4}\right)\hat{j} = \|\vec{v}\|\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{j}\right) = \|\vec{v}\|\hat{v}\ .$$

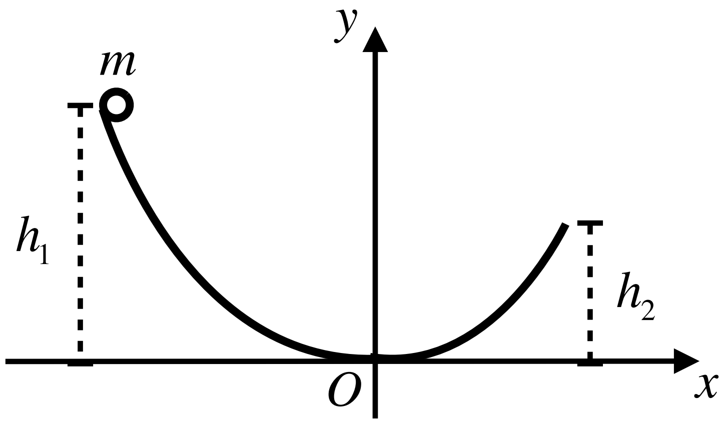
Il braccio del momento è il vettore con coda nell'origine e punta in m e si può scrivere come la somma dei vettori, il vettore che ha coda in O punta nell'intersezione fra la traiettoria e l'asse y ed il vettore che da tale intersezione punta verso m:

$$\vec{r}_O = \left(a\,\hat{j}\right) + b\,\hat{v}$$

dove b è un parametro ignoto che specifica la posizione del punto m sulla traiettoria (linea tratteggiata). Il momento della quantità di moto sarà quindi:

$$\vec{L}_O = m\vec{r}_O \wedge \vec{v} = m\|\vec{v}\|\left[\left(a\,\hat{j}\right) + b\,\hat{v}\right] \wedge \hat{v} = m\|\vec{v}\|\left(a\,\hat{j}\right) \wedge \hat{v} = -k\,m a\|\vec{v}\|\sin\theta_{jv} = -\frac{\sqrt{2}}{2}k\,m a\|\vec{v}\|\ .$$

Esercizio 2



Un corpo di massa m inizialmente fermo scivola, senza attrito, lungo un profilo parabolico di equazione $y = ax^2$ partendo da una quota h_1 (si veda la figura). Determinare il vettore velocità nell'istante in cui il corpo si stacca dal profilo.

Soluzione

Il corpo, muovendosi lungo il profilo, è soggetto alla forza peso e alla reazione vincolare del profilo stesso. La reazione vincolare non fa alcun lavoro perché agisce perpendicolarmente al profilo (e quindi allo spostamento) quindi l'energia meccanica di m intesa come la somma della sua energia cinetica e dell'energia potenziale della forza peso è conservata lungo il moto. Inizialmente il corpo è fermo e quindi si avrà:

$$mgh_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgh_2 \Rightarrow v_2 = \sqrt{2g(h_2 - h_1)} \, .$$

dove v_2 è il modulo della velocità nell'istante in cui il corpo si stacca dal profilo. Per determinare direzione e verso della velocità è sufficiente osservare che nel momento del distacco la velocità di m sarà tangente alla parabola. Per determinare il verso di questa tangente si può procedere in modi diversi. Ad esempio si può parametrizzare la parabola mediante un vettore $\vec{r}_P(x) = x\,\hat{i} + a\,x^2\,\hat{j}$ e calcolare la derivata di questo vettore:

$$\vec{t}(x) = \frac{d\vec{r}_P(x)}{dx} = \hat{i} + 2\,a\,x\,\hat{j} \, .$$

Il vettore $\vec{t}(x)$ così ottenuto è tangente alla parabola ma non è un versore, va normalizzato:

$$\hat{t}(x) = \frac{\hat{i} + 2ax\,\hat{j}}{\sqrt{1+4a^2x^2}}$$

ed infine calcolato nel punto del distacco in cui vale: $h_2 = a x_d^2 \Rightarrow x_d = \sqrt{\frac{h_2}{a}}$. Quindi il versore tangente sarà:

$$\hat{t}(x_d) = \frac{\hat{i} + 2\sqrt{a h_2}\,\hat{j}}{\sqrt{1+4ah_2}}$$

e quindi

$$\vec{v}_2 = \sqrt{2g(h_2 - h_1)}\,\frac{\hat{i} + 2\sqrt{a h_2}\,\hat{j}}{\sqrt{1+4ah_2}}\,.$$

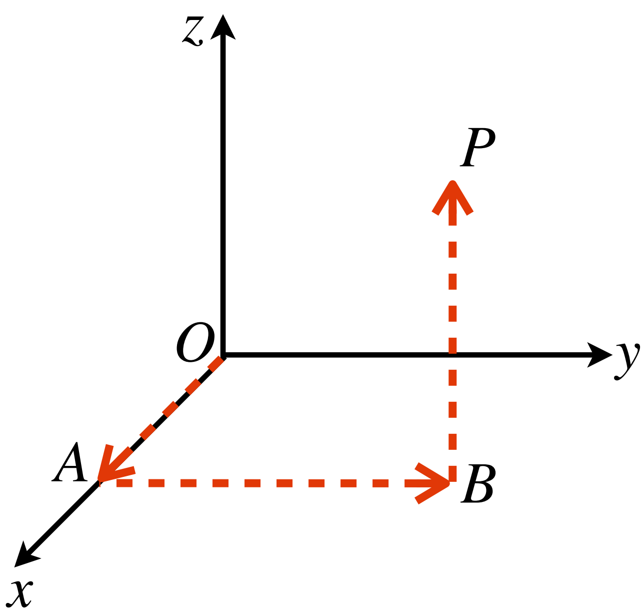
Esercizio 3

Verificare che il campo di forza

$$\vec{F}(x,y,z) = \alpha\left[yz\left(4x^3+y^3+z^3\right)\hat{i}\right] + \left[xz\left(x^3+4y^3+z^3\right)\hat{j}\right] + \left[xy\left(x^3+y^3+4z^3\right)\hat{k}\right]$$

è conservativo e in tal caso determinarne l'espressione dell'energia potenziale (α parametro costante).

Soluzione



condizione è soddisfatta il campo è conservativo. Calcoliamo, ad esempio, solo la componente x del rotore:

$$\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{F}\right)_x=\partial_y F_z-\partial_z F_y=\alpha\left[x\left(x^3+y^3+4z^3\right)+xy\left(3y^2\right)-x\left(x^3+4y^3+z^3\right)-xz\left(3z^2\right)\right]=0\ .$$

È facile verificare che anche le rimanenti due componenti del rotore sono nulle ed il campo è conservativo.

Determiniamo quindi l'energia potenziale del campo. Il lavoro del campo su un qualsiasi percorso che congiunge due qualsiasi punti O e P è uguale alla differenza fra il valore dell'energia potenziale in O e l'energia potenziale in P. Formalmente: $L_{O\to P}=V_O-V_P$.

Fissiamo arbitrariamente O nell'origine del sistema di riferimento e sia P un punto generico di coordinate (x,y,z). Scegliamo quindi un percorso arbitrario che congiunga i due punti, ad esempio la spezzata γ_1 che segue la traiettoria $O\to A\to B\to P$ (dove $O\to A$ è un percorso rettilineo γ_1 che congiunge O con $A:(x,0,0)$, $A\to B$ è un percorso rettilineo γ_2 che congiunge A con $B:(x,y,0)$ ed, infine $B\to P$ è un percorso rettilineo γ_3 che congiunge B a P). Si avrà:

$$L_\gamma=\int_\gamma\vec{F}\cdot\overrightarrow{ds}=\int_{\gamma_1}\vec{F}\cdot\overrightarrow{ds}+\int_{\gamma_2}\vec{F}\cdot\overrightarrow{ds}+\int_{\gamma_3}\vec{F}\cdot\overrightarrow{ds}\ .$$

Calcoliamo separatamente i tre integrali:

$$\int_{\gamma_1}\vec{F}\cdot\overrightarrow{ds}=\int_O^A\vec{F}(\gamma_1)dx\,\hat{i}=\int_O^A F_x(\gamma_1)dx=\int_O^A 0\,dx=0$$

poiché l'integrando è zero sul tratto $O\to A$,

$$\int_{\gamma_2}\vec{F}\cdot\overrightarrow{ds}=\int_A^B\vec{F}(\gamma_2)dy\,\hat{j}=\int_A^B F_y(\gamma_2)dy=\int_A^B 0\,dy=0$$

poiché l'integrando è zero sul tratto $A\to B$, ed infine

$$\int_{\gamma_3}\vec{F}\cdot\overrightarrow{ds}=\int_B^P\vec{F}(\gamma_3)dz\,\hat{k}=\int_B^P F_z(\gamma_3)dz=\int_B^P\alpha xy\left(x^3+y^3+4z^3\right)dz=\alpha\,x\,y\,z\left(x^2y+y^2z+z^2x\right)$$

sul tratto $B\to P$. Ricapitolando, dunque:

$$V_O-V_P=\alpha\,x\,y\,z\left(x^2y+y^2z+z^2x\right)\Rightarrow V_P=-\alpha\,x\,y\,z\left(x^2y+y^2z+z^2x\right)+V_O$$

e fissando arbitrariamente a zero l'energia potenziale in O (ovvero $V_O=0$) allora si avrà:

$$V(x,y,z) = -\alpha\, x\, y\, z\left(x^2 y + y^2 z + z^2 x\right).$$

Esercizio 4

Un satellite artificiale di massa m ruota attorno alle Terra (massa M_T) su di un'orbita circolare di raggio R_s (rispetto al centro della Terra). Trascurando il moto della Terra determinare l'espressione delle seguenti quantità:

1) l'energia cinetica T_s e l'energia meccanica totale E_s del satellite in funzione della costante gravitazionale γ , di m , M_T e di R_s ;
2) supponendo che il satellite perda una quantità di energia meccanica totale pari a 1/8 della sua energia cinetica iniziale T_s e incominci a muoversi intorno alla terra su una nuova orbita circolare, il valore del rapporto R_s'/R_s tra il raggio R_s' della nuova orbita circolare e quello originario R_s .

Soluzione

Un satellite in moto intorno alla terra è soggetto alla sola forza di attrazione gravitazionale. Se il satellite si muove su un'orbita circolare di raggio R_s il suo moto sarà circolare uniforme e l'accelerazione centripeta del satellite moltiplicata per la sua massa m sarà uguale alla forza gravitazionale cui è soggetto:

$$m\frac{v_s^2}{R_s} = \gamma\frac{mM_T}{R_s^2} \Rightarrow v_s^2 = \gamma\frac{M_T}{R_s} \quad .$$

Quindi l'energia cinetica del satellite sarà

$$T_s = \frac{1}{2}mV_s^2 = \frac{\gamma m_s M_t}{2R_s}$$

e l'energia meccanica totale sarà:

$$E_s = T_s + V_s = \frac{\gamma m_s M_t}{2R_s} - \frac{\gamma m_s M_t}{R_s} = -\frac{\gamma m_s M_t}{2R_s} \;.$$

Se il satellite perde una certa quantità di energia cinetica pari a $\Delta T = \frac{1}{8}\frac{\gamma m_s M_t}{2R_s} = \frac{\gamma m_s M_t}{16R_s}$ e finisce su una nuova orbita circolare allora la sua energia meccanica totale diventerà

$$E_s' = E_s - \Delta T = -\frac{\gamma m_s M_t}{2R_s} - \frac{\gamma m_s M_t}{16R_s} = -\frac{9\gamma m_s M_t}{16R_s}.$$

Formalmente, tuttavia, E_s' si potrà esprimere in funzione di R_s' come

$$E_s' = T_s' + V_s' = \frac{\gamma m_s M_t}{2R_s'} - \frac{\gamma m_s M_t}{R_s'} = -\frac{\gamma m_s M_t}{2R_s'}$$

e quindi varrà la seguente uguaglianza:

$$E_s' = -\frac{\gamma m_s M_t}{2R_s'} = -\frac{9\gamma m_s M_t}{16R_s} \Rightarrow \frac{R_s'}{R_s} = \frac{8}{9}.$$

Esercizio 5

$n = 4$ moli di gas perfetto monoatomico sono all'equilibrio termodinamico all'interno di un recipiente a pareti rigide ad una temperatura incognita (T_1). Successivamente il recipiente viene posto a contatto con un serbatoio di calore alla temperatura $T_2 = 0^\circ C$ la cui entropia, a causa dello scambio di calore, aumenta di $\Delta S_s = 70\ J/K$. Determinare la temperatura iniziale del gas.

Soluzione

Una volta a contatto, il serbatoio ed il recipiente raggiungeranno l'equilibrio termico alla temperatura T_2 (il serbatoio, per definizione, è un sistema termodinamico con una grande capacità termica che scambia calore ad una temperatura che rimane costante). Quindi il gas passa da uno stato iniziale (V_1, T_1) ad uno stato finale (V_1, T_2) e il suo volume rimane inalterato durante tutto il processo. La quantità infinitesima di calore scambiata dal gas a volume costante è $\delta Q_V = n\, C_V dT_g$ (con $C_V = \frac{3}{2}R$ essendo il gas monoatomico) e all'equilibrio $\Delta Q = nC_V(T_2 - T_1)$. Il calore assorbito dal gas è uguale al calore ceduto dal serbatoio e viceversa ($\delta Q_g = -\delta Q_s$).

La variazione di entropia del serbatoio è

$$\Delta S_s = \int_{ini}^{fin} \frac{\delta Q_s}{T_s}\bigg|_{rev} = -\int_{ini}^{fin} \frac{\delta Q_g}{T_2} = -\frac{nC_V(T_2 - T_1)}{T_2}$$

dove abbiamo calcolato la variazione su una trasformazione reversibile in cui il gas mantiene il volume costante ed il serbatoio rimane a temperatura costante T_2 . Infine abbiamo utilizzato la relazione $\delta Q_g = -\delta Q_s$. L'espressione per la variazione di entropia del serbatoio contiene quantità note a parte T_1 e quindi è l'equazione risolvente:

$$T_1 = T_2 \frac{\left(\Delta S_g + 6R\right)}{6R} .$$

Esercizio 6

Un contenitore adiabatico è diviso in due scompartimenti di volume V_1 e V_2 da un setto rimovibile. Nei compartimenti si trovano rispettivamente n_1 ed n_2 moli di gas ideale di tipo differente aventi la stessa pressione P e temperatura T .

Ad un certo istante il setto viene rimosso. Calcolare la variazione di entropia del sistema.

Soluzione

Inizialmente i due gas si trovano all'equilibrio, ciascuno in un compartimento del contenitore:

$$PV_1 = n_1 RT \ , \quad PV_2 = n_2 RT \Rightarrow \frac{V_1}{n_1} = \frac{V_2}{n_2} .$$

Tolto il setto i due gas si miscelano in un volume $V = V_1 + V_2$. Il processo è simile all'espansione libera di un singolo gas in un contenitore vuoto. Infatti, espandendosi, i due gas non fanno lavoro (poiché in prima approssimazione si può immaginare che non sentano la resistenza dell'altro gas) ed essendo alla stessa temperatura non scambiano nemmeno calore. Mantengono una temperatura costante e uguale a quella iniziale. Il processo è irreversibile poiché non sarà più possibile separare i gas e riportarli nei compartimenti iniziali. Al termine il sistema raggiungerà l'equilibrio termodinamico e la mistura dei due gas ideali formerà una mistura ideale di gas che è possibile descrive con l'equazione di stato dei gas perfetti:

$$P_f(V_1+V_2)=(n_1+n_2)RT \Rightarrow P_f=\frac{(n_1+n_2)RT}{(V_1+V_2)}\ .$$

Per calcolare la variazione totale di entropia ragioniamo come dovessimo considerare due espansioni libere e sommiamo la variazione di entropia calcolata per ciascun gas. Ad esempio per il gas 1:

$$\Delta S_1=\int_{ini}^{fin}\frac{\delta Q}{T}\bigg|_{rev}=\int_{ini}^{fin}\frac{\delta Q}{T}\bigg|_{isoterma}$$

e su un'isoterma $\delta Q=\delta L=p\,dV$. Dunque

$$\Delta S_1=\int_{ini}^{fin}\frac{p\,dV}{T}=\int_{V_1}^{V_1+V_2}\frac{n_1R\,dV}{V}=n_1R\log\frac{V_1+V_2}{V_1}\ .$$

Analogamente per il gas 2:

$$\Delta S_2=\int_{ini}^{fin}\frac{p\,dV}{T}=\int_{V_2}^{V_1+V_2}\frac{n_1R\,dV}{V}=n_2R\log\frac{V_1+V_2}{V_2}$$

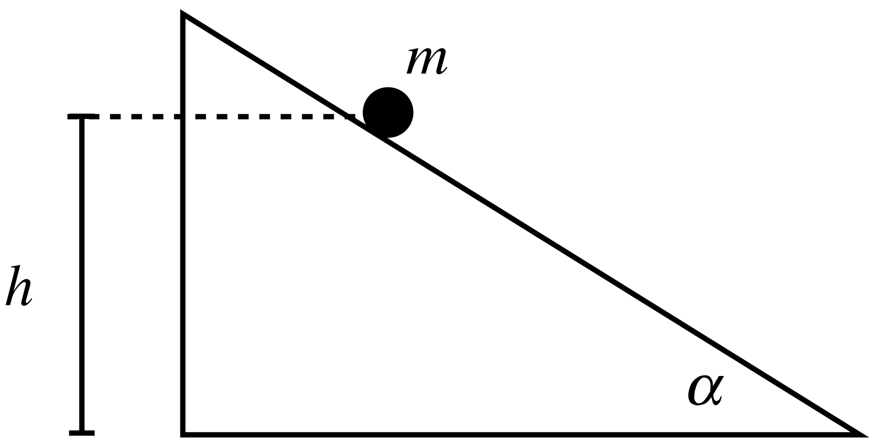
e la somma è:

$$\Delta S=\Delta S_1+\Delta S_2=n_1R\log\frac{V_1+V_2}{V_1}+n_2R\log\frac{V_1+V_2}{V_2}=R\log\frac{\left(V_1+V_2\right)^{n_1+n_2}}{V_1^{n_1}V_2^{n_2}}\ .$$

Esercizio 7

Un corpo di massa m cade da una quota h mentre un secondo corpo di massa m scende, dalla stessa quota, lungo un piano inclinato di un angolo α . Determinare l'intervallo temporale ΔT tra le partenza affinché i due corpi arrivino a terra contemporaneamente.

Soluzione



Per risolvere il problema determiniamo, in generale, il tempo impiegato da un corpo di massa m per scendere lungo un piano inclinato di un generico angolo α da una quota h in assenza di attrito. Il tempo impiegato per raggiungere terra da un corpo lasciato cadere dalla quota h lo otterremo quindi dai risultati ottenuti per il piano inclinato, nel limite $\alpha \to 90^\circ$.

Il corpo è soggetto all'azione di due forze: la forza peso $\vec{P}$, diretta verso il suolo, e la reazione vincolare del piano $\vec{R}$ diretta perpendicolarmente al piano inclinato, verso l'alto. La seconda legge della dinamica è quindi:

$$m\,\vec{a} = \vec{P} + \vec{R}$$

e, proiettata nella direzione del moto (parallela al piano inclinato), essa diventa;

$$m\ddot{s}(t) = mg\sin\alpha$$

dove $s(t)$ è lo spostamento del corpo rispetto alla posizione di partenza. L'equazione sopra descrive un moto uniformemente accelerato ed ha come soluzione generale la seguente espressione per $s(t)$:

$$s(t) = \frac{1}{2}g\sin\alpha\, t^2 + \dot{s}(0s)t + s(0s)\,.$$

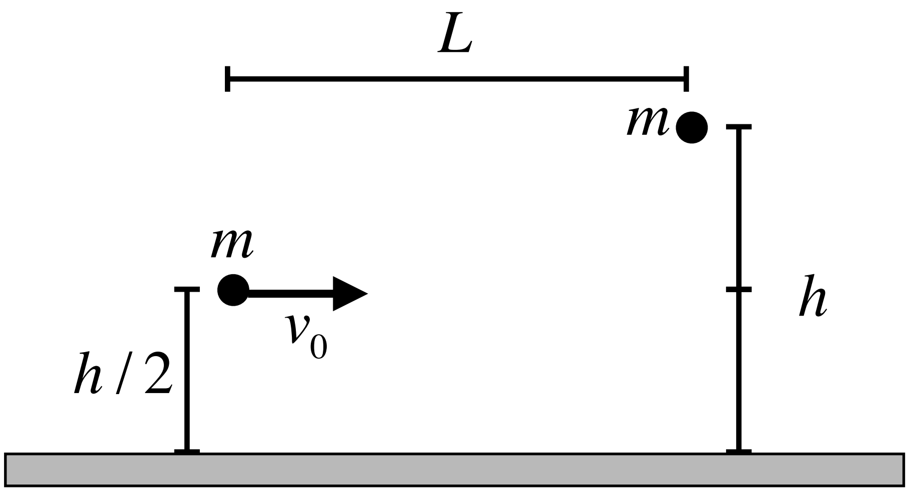
Il corpo m parte da fermo ($\dot{s}(0s) = 0$) ed arbitrariamente possiamo scegliere $s(0s) = 0$. Quindi lo spostamento in funzione del tempo sarà: $s(t) = \frac{1}{2}g\sin\alpha\, t^2$. Il corpo arriva al suolo dopo aver percorso un tratto $L = \frac{h}{\sin\alpha}$. Il tempo t_α che impiega per arrivare al suolo lo troviamo risolvendo l'equazione:

$$\frac{h}{\sin\alpha} = \frac{1}{2}g\sin\alpha\, t_\alpha^2 \Rightarrow t_\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}\sqrt{\frac{2h}{g}}\,.$$

Il tempo che genericamente impiega un corpo lasciato cadere nel vuoto da una quota h per raggiungere il suolo sarà $t_{90^\circ} = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ ed è in generale minore di t_α. Quindi sarà:

$$\Delta t \equiv t_{90^\circ} - t_\alpha = \left(1 - \frac{1}{\sin\alpha}\right)\sqrt{\frac{2h}{g}}\,.$$

Esercizio 8



Un proiettile di massa m viene lanciato orizzontalmente ad una quota $h/2$ con velocità $\vec{v_0}$ mentre un secondo proiettile di massa m viene lasciato cadere da una quota doppia h. Determinare l'intervallo temporale che deve intercorrere tra tali azioni affinché il primo proiettile colpisca il secondo.

Soluzione

Studiamo separatamente i due moti. Entrambi i punti materiali sono soggetti alla sola forza peso e la loro traiettoria dipenderà quindi solamente dalle condizioni iniziali del moto. Per chiarezza di notazione denominiamo con il pedice 1 le quantità che si riferiscono al corpo a sinistra in figura e con il pedice 2 le quantità che si riferiscono al corpo di destra. Dunque per il corpo 1:

$$\vec{r}_1(t) = \left[\dot{x}(t_1)(t-t_1) + x(t_1)\right]\hat{i} + \left[-\frac{1}{2}g(t-t_1)^2 + \dot{y}(t_1)(t-t_1) + y(t_1)\right]\hat{j}$$

dove la direzione $\hat{i}$ è quella orizzontale (da sinistra a destra in figura) mentre la direzione $\hat{j}$ è quella verticale (dal basso verso l'alto in figura). Un'espressione analoga sarà la soluzione generale dell'equazione del moto per il corpo 2. Se fissiamo il sistema di riferimento con origine sul piede della verticale al suolo che contiene il corpo 1 allora potremo scrivere i due vettori posizionali nella forma:

$$\vec{r}_1(t) = v_0\left(t - t_1\right)\hat{i} + \left[-\frac{1}{2}g\left(t - t_1\right)^2 + \frac{h}{2}\right]\hat{j}$$

e

$$\vec{r}_2(t) = L\hat{i} + \left[-\frac{1}{2}g\left(t - t_2\right)^2 + h\right]\hat{j}\ .$$

Nelle due espressioni sopra t_1 e t_2 sono i due istanti di lancio di 1 e 2 (ed in generale sono diversi). I due corpi collidono se è possibile trovare un istante t_* in cui $\vec{r}_1(t_*) = \vec{r}_2(t_*)$ ovvero (eguagliando le componenti corrispondenti):

$$\begin{cases} v_0\left(t_* - t_1\right) = L \\ -\frac{1}{2}g\left(t_* - t_1\right)^2 + \frac{h}{2} = -\frac{1}{2}g\left(t_* - t_2\right)^2 + h \end{cases}$$

che risolviamo in t_* e t_1. La prima equazione dà: $t_* = \frac{L}{v_0} + t_1$. La seconda quindi diventa:

$$-\frac{1}{2}g\frac{L^2}{v_0^2} = -\frac{1}{2}g\left(\frac{L}{v_0} + t_1 - t_2\right)^2 + \frac{h}{2} \Rightarrow 0 = -\frac{1}{2}g(t_1 - t_2)^2 - \frac{gL}{v_0}(t_1 - t_2) + \frac{h}{2}$$

ed è un'equazione di secondo grado in $(t_1 - t_2)$. Le sue soluzioni sono:

$$t_1 = t_2 - \left[\frac{L}{v_0} \pm \sqrt{\left(\frac{L}{v_0}\right)^2 + \frac{h}{g}}\right]$$

in cui il segno + corrisponde al caso $t_1 > t_2$ e il segno meno corrisponde al caso $t_2 > t_1$. Possiamo determinare quale delle due soluzioni corrisponda alla risposta al problema calcolando corrispondentemente t_*: nel primo caso

$$t_*^{(1)} = \frac{L}{v_0} + t_1 = \frac{L}{v_0} + t_2 - \left[\frac{L}{v_0} + \sqrt{\left(\frac{L}{v_0}\right)^2 + \frac{h}{g}}\right] = t_2 - \sqrt{\left(\frac{L}{v_0}\right)^2 + \frac{h}{g}} > t_2$$

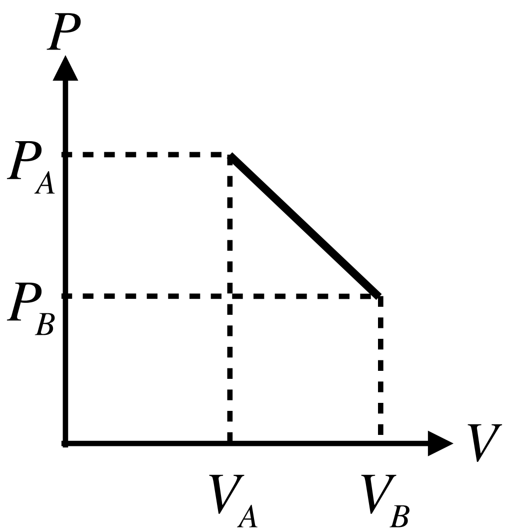
mentre nel secondo caso

$$t_*^{(2)} = \frac{L}{v_0} + t_1 = \frac{L}{v_0} + t_2 - \left[\frac{L}{v_0} - \sqrt{\left(\frac{L}{v_0}\right)^2 + \frac{h}{g}}\right] = t_2 + \sqrt{\left(\frac{L}{v_0}\right)^2 + \frac{h}{g}} > t_2$$

Siccome t_2 è l'istante di lancio del corpo 2 e l'urto deve avvenire ad un istante t_* successivo al lancio ovvero $t_* > t_2$ allora la risposta corretta al quesito del problema è $t_*^{(2)}$ e corrispondentemente si avrà che l'intervallo temporale che deve intercorrere tra i due lanci affinché il primo proiettile colpisca il secondo è

$$t_2 - t_1 = \frac{L}{v_0} - \sqrt{\left(\frac{L}{v_0}\right)^2 + \frac{h}{g}}\ .$$

Esercizio 9



Un gas compie la trasformazione quasi-statica rappresentata in figura. Sapendo che $P_A = 5\,bar$, $P_B = 1\,bar$, $V_A = 300\,cm^3$ e $T_B = 2T_A$ si calcoli il lavoro eseguito dal gas nella trasformazione.

Soluzione

Il lavoro è semplicemente l'area sottesa della curva della trasformazione. L'area è quella di un trapezio rettangolo con base maggiore uguale a P_A , base minore uguale a P_B ed altezza uguale a $V_B - V_A$. Perciò:

$$L = \frac{(P_A + P_B)(V_B - V_A)}{2} .$$

Esercizio 10

Un blocco di alluminio di massa $m = 2\,kg$ e temperatura $T_1 = 300^{\circ}C$ viene gettato in un grande contenitore di acqua alla temperatura $T_2 = 20^{\circ}C$. Sapendo che

i) una mole di alluminio pesa $27\,g$;

ii)il calore specifico molare e dei solidi in generale, con buona approssimazione, è dato dalla legge di Dulong-Petit e vale $c = 3R$;

iii)le variazioni di volume del metallo possono essere trascurate;

calcolare le variazioni di entropia del metallo e dell'acqua.

Soluzione

Il grande contenitore d'acqua ha una capacità termica molto maggiore del blocco di alluminio. Quindi i due sistemi si scambieranno calore e la temperatura dell'alluminio varierà fino a diventare la stessa dell'acqua che viceversa subirà variazioni trascurabili di temperatura. All'equilibrio finale dunque alluminio ed acqua avranno entrambi una temperatura uguale a T_2 . La variazione di entropia del blocco di alluminio è da calcolare lungo una qualsiasi trasformazione reversibile. Possiamo immaginare di calcolarla lungo una trasformazione in cui l'alluminio cede quasi-staticamente calore ad una successione di termostati fino a raggiungere la temperatura T_2. Matematicamente possiamo scrivere:

$$\Delta S_{all} = \int_{ini}^{fin} \frac{\delta Q}{T}\bigg|_{rev} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{n\,c\,dT}{T} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{2000\,R\,dT}{9T} = \frac{2000}{9} R \log\frac{T_2}{T_1} .$$

La variazione di entropia del contenitore d'acqua è

$$\Delta S_{acq} = \int_{ini}^{fin} \frac{\delta Q}{T}\bigg|_{rev} = -\int_{T_1}^{T_2} \frac{n\,c\,dT}{T_2} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{2000\,R\,dT}{9T_2} = \frac{2000}{9} R \frac{T_2 - T_1}{T_2}$$

dove abbiamo osservato che il calore assorbito dall'acqua è uguale al calore ceduto dall'alluminio (e quindi $\int_{ini}^{fin} \delta Q_{acq} = -\int_{ini}^{fin} \delta Q_{all} = -\int_{T_1}^{T_2} n\,c\,dT$) e che la temperatura dell'acqua è costante ed uguale a T_2 lungo tutta la trasformazione.

Esercizio 11

Un punto materiale di muove secondo l'equazione oraria $x(t) = 5at + 3b$ e $y(t) = 4b$. Trovare l'espressione dell'angolo formato dai vettori posizione e velocità.

Soluzione

Il vettore posizione è $\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} = (5at + 3b)\hat{i} + 4b\hat{j}$. Il vettore velocità è la derivata del vettore posizione: $\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = 5a\hat{i}$. L'angolo formato da questi vettori, di modulo rispettivamente $\|\vec{r}\| = \sqrt{(5at+3b)^2+16b^2} = \sqrt{25a^2t^2+30abt+25b^2}$ e $\|\vec{v}\| = 5a$ compare nell'espressione del loro prodotto scalare:

$\vec{r}\cdot\vec{v} = \|\vec{r}\|\|\vec{v}\|\cos\theta_{rv}$;

in rappresentazione cartesiana il prodotto scalare fra i due vettori si può calcolare e vale:

$$\vec{r}\cdot\vec{v} = (5at+3b)\cdot 5a + 4b\cdot 0 = 25a^2t + 15ab .$$

I risultati devono ovviamente essere uguali quindi

$$\|\vec{r}\|\|\vec{v}\|\cos\theta_{rv} = 25a^2t+15ab \Rightarrow \sqrt{25a^2t^2+30abt+25b^2}\cdot 5a\cdot\cos\theta_{rv} = 25a^2t+15ab \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\theta_{rv} = \frac{25a^2t+15ab}{\sqrt{25a^2t^2+30abt+25b^2}\cdot 5a} \Rightarrow \theta_{rv} = \arccos\frac{5at+3b}{\sqrt{25a^2t^2+30abt+25b^2}} .$$

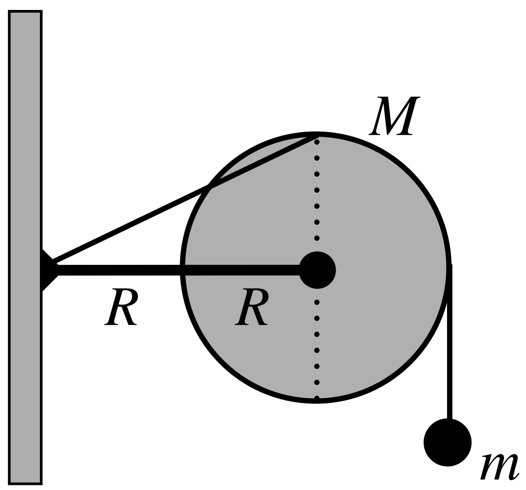
Esercizio 12

Sia dato un disco di raggio R e massa M, di densità superficiale uniforme, sostenuto nel suo centro di massa da un braccio orizzontale fissato al muro (vedi figura). Il disco è libero di ruotare intorno al centro di massa. Nell'ipotesi che la massa appesa al bordo del disco valga m determinare:

i) la tensione del cavo affinché il sistema sia in equilibrio;

ii)l'accelerazione angolare del disco se il cavo viene tagliato.

Soluzione



In condizioni di equilibrio statico la risultante delle forze e dei momenti deve essere nulla. In particolare quindi il modulo della tensione $\vec{T}_m$ del cavo che sorregge m deve essere uguale alla forza peso $\vec{P}_m$ cui m è soggetto.Dovrà inoltre banalmente essere: $\vec{T}_m = -\vec{P}_m$. Fissiamo una coppia di versori di riferimento $\hat{i}$, parallelo al suolo con verso da sinistra a destra, e $\hat{j}$, perpendicolare al suolo e diretto verso l'alto. In funzione di questa coppia di versori sarà: $\vec{P}_m = -mg\,\hat{j}$.

Il disco è invece soggetto a 4 forze:

1) la forza peso $\vec{P}_M$ che si può applicare al suo centro di massa,
2) la tensione della fune che gli impedisce di ruotare $\vec{T}_M$, applicata al bordo del disco sulla verticale che contiene il centro dello stesso,
3) il vincolo della sbarra $\vec{\rho}$, applicato al centro del disco,
4) la tensione del cavo $\vec{T}_m{}'$ vincolato ad m , applicata al bordo del disco sulla verticale che contiene m .

Applichiamo il primo principio al disco (nelle condizioni di equilibrio statico):

$$\vec{P}_M + \vec{T}_M + \vec{\rho} + \vec{T}_m{}' = 0 = -Mg\,\hat{j} + \vec{T}_M + \vec{\rho} - mg\,\hat{j} \;;$$

in generale $\vec{\rho} = \rho_x\,\hat{i} + \rho_y\,\hat{j}$. La tensione $\vec{T}_M$ ha un verso che si può determinare geometricamente dalla figura tenendo conto che l'angolo fra il cavo e la verticale al suolo è 60° quindi

$$\vec{T}_M = \left(\vec{T}_M \cdot \hat{i}\right)\hat{i} + \left(\vec{T}_M \cdot \hat{j}\right)\hat{j} = \left\|\vec{T}_M\right\|\left[\cos\left(90^\circ + 60^\circ\right)\hat{i} + \cos\left(90^\circ + 30^\circ\right)\hat{j}\right] = -\left\|\vec{T}_M\right\|\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{i} + \frac{1}{2}\hat{j}\right].$$

Se proiettiamo la relazione sopra lungo $\hat{i}$ e poi lungo $\hat{j}$ otteniamo due equazioni

$$\begin{cases} \rho_x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\left\|\vec{T}_M\right\| = 0 \\ -Mg - \dfrac{1}{2}\left\|\vec{T}_M\right\| + \rho_y - mg = 0 \end{cases}$$

nelle tre incognite $\left\|\vec{T}_M\right\|$, ρ_x , ρ_y .

Scriviamo anche il secondo principio per il disco scegliendo come centro di riduzione il centro del disco:

$$\vec{N} = R\hat{j} \wedge \vec{T}_M + R\hat{i} \wedge \vec{T}_m{}' = 0 \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{2} R \left\| \vec{T}_M \right\| - Rmg \right) \hat{k} = 0 \Rightarrow \left\| \vec{T}_M \right\| = 2\frac{\sqrt{3}}{3} mg \, .$$

Dunque, applicando il secondo principio, determiniamo completamente la tensione $\vec{T}_M$

$$\vec{T}_M = -\frac{\sqrt{3}}{3} mg \left[\sqrt{3}\hat{i} + \hat{j} \right].$$

Sostituendo il risultato nelle equazioni che discendono dal primo principio possiamo anche determinare le componenti di $\vec{\rho}$:

$$\begin{cases} \rho_x = mg \\ \rho_y = \left[M + \left(\frac{\sqrt{3}}{3} + 1 \right) m \right] g \end{cases} .$$

Se il cavo che stabilizza il sistema viene tagliato, viene a mancare l'effetto di $\vec{T}_M$ ed il secondo principio si esprime come

$$\vec{N} = R\hat{j} \wedge \vec{T}_M = \frac{d\vec{L}}{dt} \Rightarrow -Rmg\hat{k} = \frac{d\vec{L}}{dt} \, .$$

Il disco incomincia a ruotare intorno al centro (che è vincolato e non può comunque muoversi). La rotazione del disco avrà una velocità angolare parallela a $\hat{k}$ che possiamo arbitrariamente scrivere come $\vec{\omega} = \omega\hat{k}$ con ω positivo quando il disco ruota in senso antiorario e negativo se ruota in senso orario (regola della mano destra). La proiezione del secondo principio nella direzione di $\vec{\omega}$ (ovvero lungo $\hat{k}$) darà

$$-Rmg = I\dot{\omega}$$

dove I è il momento d'inerzia del disco rispetto ad un asse passante per il suo centro (che è il centro di riduzione scelto) e diretto perpendicolarmente al piano del disco ovvero $I = \frac{MR^2}{2}$. Quindi:

$$-Rmg = \frac{MR^2}{2} \dot{\omega} \Rightarrow \dot{\omega} = -2\frac{mg}{MR}$$

e l'accelerazione angolare sarà

$$\dot{\vec{\omega}} = -2\frac{mg}{MR}\hat{k} \ .$$

Si noti che, ovviamente, il disco incomincia a ruotare in senso orario.

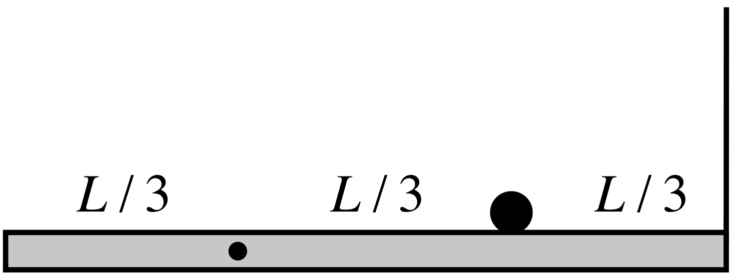
Esercizio 13

Sia data una sbarra di lunghezza L , massa M e densità lineare uniforme incernierata ad un terzo della sua lunghezza (vedere figura). Nella ipotesi che la massa appoggiata valga m determinare:

i) la tensione della fune affinché la sbarra sia in equilibrio,

ii) l'accelerazione angolare qualora in filo venisse tagliato.

Soluzione



La sbarra è soggetta a 4 forze:

1) la forza peso $\vec{P}_M$, diretta verso il basso ed applicata al suo centro di massa,

2) la reazione vincolare dell'asse di rotazione $\vec{\rho}$, applicata ad un terzo della sua lunghezza,

3) la tensione del cavo $\vec{T}$ applicata ad un suo estremo,

4) la forza peso $\vec{P}_m$ della massa m applicata a due terzi della sua lunghezza e diretta verso il basso.

Possiamo risolvere il problema utilizzando il secondo principio. Fissiamo due versori, $\hat{i}$ (parallelo al suolo da sinistra a destra) ed $\hat{j}$ (perpendicolare al suolo dal basso in alto) e scegliamo il centro di riduzione in corrispondenza della cerniera cui è vincolata la sbarra. Allora potremo scrivere (in condizioni di equilibrio statico):

$$\vec{N} = \left(\frac{L}{2} - \frac{L}{3}\right)\hat{i} \wedge \vec{P}_M + \frac{2}{3}L\hat{i} \wedge \vec{T} + \frac{1}{3}L\hat{i} \wedge \vec{P}_m = 0$$

dove $\vec{P}_M = -Mg\,\hat{j}$, $\vec{T} = T\,\hat{j}$ e $\vec{P}_m = -mg\,\hat{j}$. Quindi si otterrà:

$$\vec{N} = -\frac{L}{6}\hat{i} \wedge Mg\,\hat{j} + \frac{2}{3}L\hat{i} \wedge T\,\hat{j} - \frac{L}{3}\hat{i} \wedge mg\,\hat{j} = \left(\frac{2}{3}LT - \frac{L}{3}mg - \frac{L}{6}Mg\right)\hat{k} = 0 \Rightarrow T = \left(\frac{m}{2} + \frac{M}{4}\right)g \ .$$

Se il filo viene tagliato il secondo principio si riscrive come:

$$\vec{N} = \frac{L}{6}\hat{i} \wedge \vec{P}_M + \frac{1}{3}L\hat{i} \wedge \vec{P}_m = \frac{d\vec{L}}{dt} \ .$$

Il sistema ruoterà intorno all'asse passante per la cerniera e perpendicolare al foglio con velocità angolare $\vec{\omega} = \omega\,\hat{k}$ (dove $\omega > 0$ per rotazioni antiorarie ed $\omega < 0$ per rotazioni orarie). Proiettata nella direzione di $\vec{\omega}$, ovvero $\hat{k}$, l'equazione sopra darà

$$-\frac{L}{3}mg - \frac{L}{6}Mg = I\dot{\omega}$$

dove I è la somma del momento d'inerzia della sbarretta rispetto all'asse che passa per la cerniera (I_s) e del momento di inerzia della massa m (I_m). Il primo momento d'inerzia si può calcolare tramite il teorema di Huygens-Steiner sapendo che il momento d'inerzia rispetto al centro di massa vale

$$I_{CM} = \frac{ML^2}{12} \Rightarrow I_s = \frac{ML^2}{12} + M\left(\frac{L}{6}\right)^2 = \frac{1}{9}ML^2 \ .$$

Il secondo momento d'inerzia è uguale a

$$I_m = m\left(\frac{L}{3}\right)^2 = \frac{mL^2}{9} \ .$$

Ricapitolando

$$-\frac{L}{3}mg - \frac{L}{6}Mg = \frac{(M+m)L^2}{9}\dot{\omega} \Rightarrow \dot{\omega} = -3\left(\frac{m + \frac{M}{2}}{m+M}\right)\frac{g}{L} \ .$$

Esercizio 14

Determinare l'angolo α , rispetto al piano orizzontale, con il quale è necessario scagliare un proiettile affinché raggiunga il punto P di massima quota di coordinate $(0, y_m, z_m)$ tali che

$z_m / y_m = 1/2$ (si indichi con v_0 la velocità iniziale e si scelga l'asse z lungo la direzione verticale).

Soluzione

Il moto del proiettile è descritto dalle seguenti equazioni cartesiane:

$$\begin{cases} y(t) = v_o \cos\alpha \, t \\ z(t) = -\dfrac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin\alpha \, t \end{cases}$$

dove α è l'angolo fra il suolo (asse y) ed il vettore velocità iniziale $\vec{v}_0$. Si noti che abbiamo arbitrariamente scelto il punto di lancio nell'origine del sistema di riferimento, l'asse y è parallelo al suolo e l'asse z è verticale, diretto verso l'alto.

Le componenti cartesiane della velocità del proiettile sono

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = v_o \cos\alpha \\ \dot{z}(t) = -gt + v_0 \sin\alpha \end{cases}$$

e all'istante t_m , in cui il punto raggiunge la quota massima, la componente della velocità nella direzione dell'asse z è uguale a zero. Quindi

$$\dot{z}(t_m) = -g t_m + v_0 \sin\alpha = 0 \Rightarrow t_m = \frac{v_0 \sin\alpha}{g} .$$

Noto t_m possiamo calcolare la posizione del proiettile a questo istante:

$$\begin{cases} y(t_m) = v_o \cos\alpha \, \dfrac{v_0 \sin\alpha}{g} \\ z(t_m) = -\dfrac{1}{2} g \left(\dfrac{v_0 \sin\alpha}{g} \right)^2 + v_0 \sin\alpha \, \dfrac{v_0 \sin\alpha}{g} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y(t_m) = \dfrac{v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g} \equiv y_m \\ z(t_m) = \dfrac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} \equiv z_m \end{cases} .$$

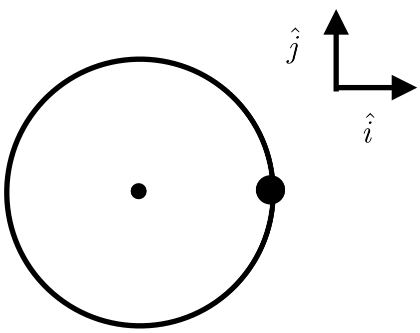
Infine, imponendo la richiesta in ipotesi $z_m / y_m = 1/2$ otteniamo l'equazione risolvente per α :

$$\frac{z_m}{y_m} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\dfrac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}}{\dfrac{v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\sin\alpha}{2\cos\alpha} = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin\alpha = \cos\alpha \Rightarrow \alpha = 45^\circ .$$

Esercizio 15

Un punto materiale di massa m è fissato sul bordo di un anello di raggio R e massa M libero di ruotare attorno ad un asse passante per il suo centro e normale al piano che lo contiene. Nella ipotesi che la densità lineare di massa sia uniforme determinare l'accelerazione iniziale del punto materiale stesso.

Soluzione



Fissiamo il centro di riduzione in corrispondenza del centro dell'anello. Le forze esterne agenti sul sistema sono la forza peso (quella dell'anello e quella del punto materiale) e la reazione vincolare che trattiene l'anello. La forza peso dell'anello e la reazione vincolare sono entrambe applicate al centro dell'anello e non danno quindi contributo alla risultante del momento delle forze esterne. Rimane il solo contributo del punto materiale:

$$\vec{N}_e = R\hat{i} \wedge \left(-mg\hat{j}\right) = -Rmg\hat{k} .$$

La direzione di $\hat{k}$ è quella dell'asse di rotazione del sistema. Definendo la velocità angolare come $\vec{\omega} = \omega\hat{k}$ e proiettando la seconda equazione cardinale nella direzione $\hat{k}$ si ottiene:

$$-Rmg = I_T\dot{\omega}$$

dove I_T è il momento d'inerzia del sistema anello+punto. Il versore $\hat{k}$ è uscente dal foglio e quindi $\vec{\omega}$ indica una rotazione antioraria quando $\omega > 0$. Fisicamente mi aspetto tuttavia una rotazione oraria per effetto del punto materiale a destra del centro dell'anello ($\omega < 0$).

Il momento d'inerzia totale sarà:

$$I_T = I_A + I_m = MR^2 + mR^2 = (M+m)R^2$$

e l'equazione cardinale diventa:

$$-Rmg = (M+m)R^2\dot{\omega} \Rightarrow -\frac{mg}{(M+m)} = R\dot{\omega}\,.$$

Si noti che l'accelerazione angolare $\dot{\omega}$ è negativa come ci si attendeva.

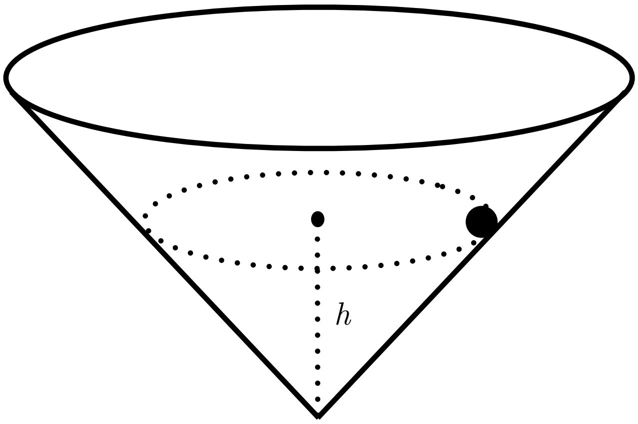
L'accelerazione del punto materiale sarà dunque diretta verso il basso ed ha modulo uguale a $\dot{\omega}R$:

$$\vec{a}_m = -\frac{mg}{(M+m)}\hat{j}\,.$$

Esercizio 16

Un punto materiale di massa m si muove all'interno di una superficie conca rovesciata priva di attrito lungo una delle sue sezioni circolari. Determinare la relazione che intercorre tra il modulo v della velocità e la quota h.

Soluzione



Il punto materiale descrive una traiettoria circolare che percorre a velocità, in modulo costante, rappresentata, in figura da una linea tratteggiata. Il piano che contiene la traiettoria è parallelo al suolo e si trova ad una distanza h dal vertice del cono. Sia α l'angolo formato dal segmento tratteggiato indicante la distanza del piano della traiettoria dal vertice e la superficie laterale del cono (ovvero una qualsiasi retta che solca la superficie laterale e passa per il vertice del cono). Il raggio della traiettoria sarà quindi $R = \sin\alpha \dfrac{h}{\cos\alpha} = h\tan\alpha$.

Il punto materiale è soggetto alla forza peso $\vec{P}$ ed alla reazione vincolare del cono $\vec{\rho}$ (diretta ortogonalmente alla superficie stessa) quindi

$$\vec{F} = \vec{P} + \vec{\rho}$$

e ed il suo moto è circolare uniforme quindi la sua accelerazione è semplicemente centripeta, ovvero diretta verso il centro della traiettoria. Introduciamo una coppia di versori: $\hat{i}_r$ diretto radialmente rispetto al centro della traiettoria descritta dal punto materiale (dal centro verso l'esterno e giacente sul piano che contiene la traiettoria) e $\hat{k}$ ortogonale al piano della traiettoria e diretto verso l'alto. Ovviamente sarà

$$\vec{P} = -mg\hat{k}$$

e

$$\vec{\rho} = \rho_r \hat{i}_r + \rho_z \hat{k}$$

con $\rho_r = \vec{\rho} \cdot \hat{i}_r = -\left\|\vec{\rho}\right\| \cos\alpha$ e $\rho_z = \vec{\rho} \cdot \hat{k} = \left\|\vec{\rho}\right\| \sin\alpha$. L'accelerazione è $\vec{a} = -\frac{v^2}{R}\hat{i}_r$.

Riscrivendo per componenti la $\vec{F} = m\vec{a}$ otteniamo:

$$-mg\hat{k} - \left\|\vec{\rho}\right\| \cos\alpha \hat{i}_r + \left\|\vec{\rho}\right\| \sin\alpha \hat{k} = -m\frac{v^2}{R}\hat{i}_r$$

e proiettando lungo $\hat{k}$ ed $\hat{i}_r$ si ha

$$\begin{cases} \left\|\vec{\rho}\right\| \sin\alpha = mg \\ \left\|\vec{\rho}\right\| \cos\alpha = m\frac{v^2}{R} \end{cases}.$$

Dividendo membro a membro le due equazioni:

$$\tan\alpha = \frac{gR}{v^2}$$

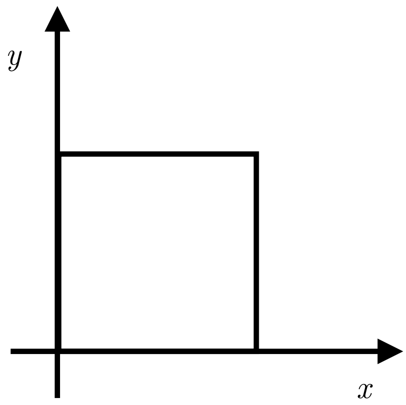
ed utilizzando l'espressione per $\tan\alpha$ precedentemente ottenuta si ottiene il risultato:

$$\frac{R}{h} = \frac{gR}{v^2} \Rightarrow \boxed{\frac{v^2}{h} = g}.$$

Esercizio 17

Una superficie quadrata di lato L , massa M e densità superficiale uniforme σ è libera di ruotare attorno ad un suo lato. Determinare il momento d'inerzia rispetto all'asse passante per quel lato.

Soluzione



La definizione di momento d'inerzia di un sistema discreto di n punti materiali è $I = \sum_{i=1}^{n} m_i d_i^2$. Nel limite del continuo (per sistemi a 2 dimensioni) la massa di ciascun punto materiale viene sostituita con la massa di un elemento infinitesimo di superficie $m_i \to \sigma dS$. La superficie deve essere opportunamente parametrizzata mediante 2 variabili e la distanza dall'asse di rotazione risulterà essere, in generale, una funzione di queste variabili $d_i \to d(\text{var})$. Infine la sommatoria sarà sostituita con un integrale per ottenere I .

Nel caso in questione è conveniente utilizzare (x, y) come variabili. Dunque sarà:

$$dS = dx\,dy$$

con $x \in [0, L]$ ed $y \in [0, L]$. Se il lato attorno a cui ruota la superficie è quello contenuto nell'asse y allora $d(\text{var}) = x$. Quindi:

$$I = \sigma \int_0^L dx \int_0^L dy\, x^2 = \sigma L \int_0^L x^2\, dx = \frac{\sigma}{3} L^4 \ .$$

Infine si noti che $M = S\sigma = L^2\sigma \Rightarrow \sigma = \frac{M}{L^2}$ e quindi:

$$I = \frac{1}{3}\frac{M}{L^2} L^4 = \boxed{\frac{ML^2}{3}}.$$

Esercizio 18

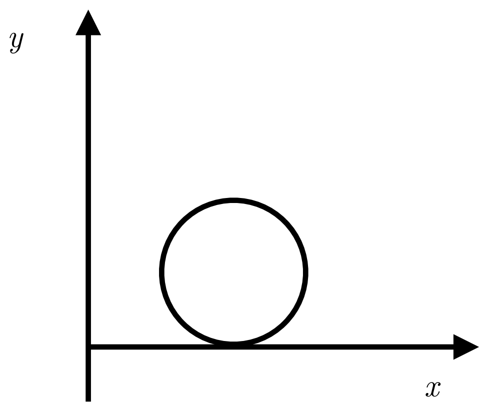
Un disco rigido e omogeneo , di massa M , spessore trascurabile e raggio R , scivola senza ruotare nel piano verticale (x,y) su una rotaia disposta come l'asse x del sistema di riferimento con velocità costante $\vec{v}_0 = v_0\hat{i}$ ortogonale al proprio asse di simmetria diretto lungo l'asse z . Ad un dato istante il suo punto di contatto raggiunge una coordinata dell'asse x a partire dalla quale la rotaia diventa scabra, e il disco assume istantaneamente un moto di rotolamento puro nel piano (x,y) con velocità angolare $\vec{\omega} = -\omega\hat{k}$ di modulo ignoto. Con riferimento a tale stato di moto e considerando la rotaia alla stregua di un vincolo ideale determinare le espressioni delle seguenti quantità:

a) la velocità $\vec{v}$ che assume il centro di massa del disco, applicando il principio di conservazione dell'energia meccanica e giustificandone l'espressione;

b) il momento della quantità di moto $\vec{K}$ assunto dal disco rispetto al centro di massa preso come centro di riduzione

c) l'eventuale variazione dell'energia meccanica totale del disco successivamente all'inizio del rotolamento puro.

Soluzione



Inizialmente il disco non rotola ma trasla semplicemente con velocità costante $\vec{v}_0$ diretta come l'asse x . In questo stato la sua energia cinetica vale

$$T_i = \frac{1}{2} m v_0^2$$

poiché non vi è contributo rotazionale. Ad un certo istante il disco transita per una zona del piano di appoggio con attrito ed istantaneamente il suo moto diventa di rotolamento puro. L'energia cinetica di un disco che rotola senza strisciare ed il cui centro di massa si muove con velocità $\vec{v}$ vale

$$T_f = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I_C \omega^2$$

dove $I_C = MR^2 / 2$ è il momento d'inerzia del disco rispetto al suo centro di massa ed ω è la sua velocità angolare di rotazione attorno al centro e, in condizioni di puro rotolamento vale vR (a meno di un segno). Quindi

$$T_f = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{MR^2}{4} \left(\frac{v}{R} \right)^2 = \frac{3}{4} m v^2 .$$

Supponendo che l'energia meccanica si conservi (e rimanendo costante l'energia potenziale associata alla forza peso) si avrà

$$T_i = T_f \Rightarrow \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{3}{4} m v^2 \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{2}{3}} v_0} .$$

La velocità sarà quindi $\vec{v} = \sqrt{\frac{2}{3}} v_0 \hat{i}$.

Il momento della quantità di moto del disco è parallelo ed equiverso ad $\vec{\omega}$ che è entrante nel foglio e quindi diretto come $-\hat{k}$. Il suo modulo vale $I_C \omega = \frac{MR^2}{2} \frac{v}{R} = \sqrt{\frac{1}{6}} M R v_0$ e quindi

$$\boxed{\vec{K} = -\sqrt{\frac{1}{6}} M R v_0 \hat{k}} .$$

La risposta al terzo quesito è banale: l'energia meccanica totale, come già sottolineato, si conserva: $\boxed{\Delta E_{mecc} = 0}$.

Esercizio 19

Un recipiente con pareti rigide e capacità termica trascurabile contiene 15 moli di gas perfetto biatomico in equilibrio termodinamico alla temperatura T_i. Il sistema viene posto in contatto con una sorgente alla temperatura $T_s = 0^{\circ}C$ costante attraverso una parete diatermica, finché raggiunge un nuovo equilibrio. Sapendo che la variazione di entropia della sorgente è stata $\Delta S_{sorg} = 750\ J/K$ e impiegando per la costante dei gas perfetti il valore $R = 8.314\ J\ mol^{-1}K^{-1}$ determinare le seguenti quantità:

a) la quantità di calore Q_{sorg} assorbita dalla sorgente;

b) il valore della temperatura T_i;

c) la variazione di entropia del gas ΔS_{gas}.

Soluzione

Quando il gas raggiunge il nuovo equilibrio termodinamico la sua temperatura sarà uguale a quella della sorgente: $T_f = T_s$. Siccome il gas si trova all'interno di un recipiente con pareti rigide e quindi indeformabile allora il volume iniziale ed il volume finale del gas saranno uguali $V_i = V_f = V$. Infine il gas scambia calore solo con la sorgente: $\delta Q_{gas} = -\delta Q_{sorg}$.

Dalla variazione di entropia della sorgente si ottiene Q_{sorg}:

$$\Delta S_{sorg} = \int_i^f \frac{\delta Q_{sorg}}{T}\bigg|_{rev} = \frac{Q_{sorg}}{T_s} \Rightarrow Q_{sorg} = T_s \Delta S_{sorg} = 273.15\ K \times 750 \frac{J}{K} = 273.15 \times 750\ J\ .$$

Siccome il calore acquistato dalla sorgente è uguale al calore ceduto dal gas allora $Q_{gas} = -Q_{sorg}$ ma per una trasformazione isocora:

$$Q_{gas} = nc_v \Delta T \Rightarrow -Q_{sorg} = 15 \times \frac{5}{2} R \times \left(T_s - T_i\right) \Rightarrow T_i = T_s + \frac{2Q_{sorg}}{75R} \simeq 930.234\ K\ .$$

Infine la variazione di entropia del gas può essere calcolata su un'isocora reversibile ($\delta L = 0$)

$$\Delta S_{gas} = \int_i^f \frac{\delta Q_{gas}}{T}\bigg|_{rev} = \int_i^f \frac{dU}{T} = \int_{T_i}^{T_f} \frac{nc_v dT}{T} = 15 \times \frac{5}{2} R \times \ln \frac{T_f}{T_i} = 15 \times \frac{5}{2} R \times \ln \frac{T_s}{T_s + \frac{2Q_{sorg}}{75R}_i},$$

$$\boxed{\Delta S_{gas} \simeq -382.054 \frac{J}{K}}.$$

Esercizio 20

Al tempo $t = 0\ s$ un proietti di massa m viene scagliato con velocità di modulo v_0 lungo una direzione inclinata di un angolo α rispetto al piano orizzontale. Determinare l'angolo α' formato dal vettore velocità con la direzione orizzontale, al tempo t' pari alla metà del tempo di ascesa.

Soluzione

Immaginando che il punto di lancio del proiettile sia in corrispondenza dell'origine del sistema di riferimento cartesiano scelto per descrivere il moto, con asse x parallelo al suolo ed asse y in verticale, diretto verso l'alto, allora le componenti cartesiane del proiettile variano nel tempo secondo le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} x(t) = v_o \cos\alpha\ t \\ y(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin\alpha\ t \end{cases}.$$

All'istante $2t'$, pari al tempo di ascesa per ipotesi, la componente lungo y della velocità si annulla:

$$\dot{y}(2t') = 0 \Rightarrow -g(2t') + v_0 \sin\alpha = 0 \Rightarrow t' = \frac{v_0 \sin\alpha}{2g}.$$

Il vettore velocità all'istante t' avrà le seguenti componenti:

$$\begin{cases} \dot{x}(t') = v_0 \cos\alpha \\ \dot{y}(t') = -g\dfrac{v_0 \sin\alpha}{2g} + v_0 \sin\alpha = \dfrac{v_0 \sin\alpha}{2} \end{cases};$$

per determinare l'angolo che il vettore velocità forma con l'asse x si consideri il prodotto scalare

$$\vec{v}(t')\cdot\hat{i} = \left\|\vec{v}(t')\right\|\cos\alpha' \Rightarrow \alpha' = \arccos\frac{\vec{v}(t')\cdot\hat{i}}{\left\|\vec{v}(t')\right\|}$$

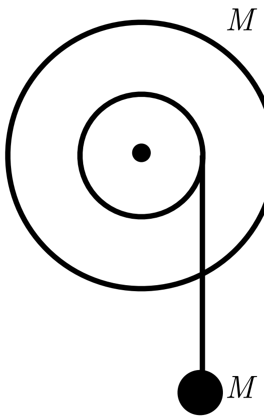
e sostituendo le componenti cartesiane:

$$\alpha' = \arccos\frac{v_0\cos\alpha}{\sqrt{\left(v_0\cos\alpha\right)^2 + \left(\dfrac{v_0\sin\alpha}{2}\right)^2}} = \arccos\frac{\cos\alpha}{\sqrt{\cos^2\alpha + \dfrac{\sin^2\alpha}{4}}}.$$

Esercizio 21

Sia dato il sistema meccanico mostrato in figura. Determinare a quale distanza dall'asse deve essere applicato il filo affinché la massa scenda con un'accelerazione pari a $1/3$ di quella di gravità. ($I = MR^2/2$)

Soluzione



Il filo è avvolto intorno ad un perno circolare di raggio r e di massa trascurabile. Il perno è fissato ad un disco di raggio R e di massa M ed intorno al perno è avvolto un filo cui è fissato un punto materiale di massa M nell'estremità opposta. Il punto si muove verso terra di moto accelerato con accelerazione pari a $g/3$.

Applichiamo la seconda equazione cardinale al disco. Su di esso agisce la forza peso $\vec{P}$, la reazione vincolare dell'asse di rotazione cui è fissato $\vec{\rho}$ e la tensione del filo $\vec{T}_r$.

Fissiamo una terna cartesiana di vettori $(\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k})$ tali che $\hat{\imath}$ sia parallelo al suolo diretto da sinistra a destra, $\hat{\jmath}$ sia perpendicolare al suolo e diretto verso l'alto, $\hat{k} = \hat{\imath} \wedge \hat{\jmath}$ (quindi uscente dal foglio).

Se scegliamo i centro di riduzione in corrispondenza del centro del disco solo la tensione $\vec{T}_r$ darà contributo al momento delle forze esterne. Sia inoltre la velocità angolare di rotazione del disco $\vec{\omega} = \omega \hat{k}$, allora la proiezione lungo $\hat{k}$ della seconda eq. cardinale sarà

$$\hat{k} \cdot \vec{N}_e = I\dot{\omega} \Rightarrow \hat{k} \cdot \left(-r\hat{\imath} \wedge T_r \hat{\jmath}\right) = I\dot{\omega} \Rightarrow -rT_r = \frac{1}{2} MR^2 \dot{\omega}$$

dove abbiamo tenuto conto del fatto che $\vec{T}_d$ agisce dall'alto verso il basso. Si noti che l'accelerazione angolare del disco è negativa il che equivale ad una rotazione oraria (se il disco è inizialmente fermo) vista la definizione di $\vec{\omega}$.

Se studiamo la dinamica del punto materiale possiamo osservare che esso è soggetto alla forza peso $\vec{p}$ ed alla tensione del cavo $\vec{T}$ diretta dal basso verso l'alto e con modulo uguale a T_r. Il punto si muove di moto accelerato verso il suolo con accelerazione nota per ipotesi quindi la seconda legge della dinamica si esprimerà come

$$\vec{p} + \vec{T} = M\vec{a} \Rightarrow -Mg\ \hat{j} + T_r\hat{j} = -M\frac{g}{3}\hat{j} \Rightarrow T_r = \frac{2}{3}Mg\ .$$

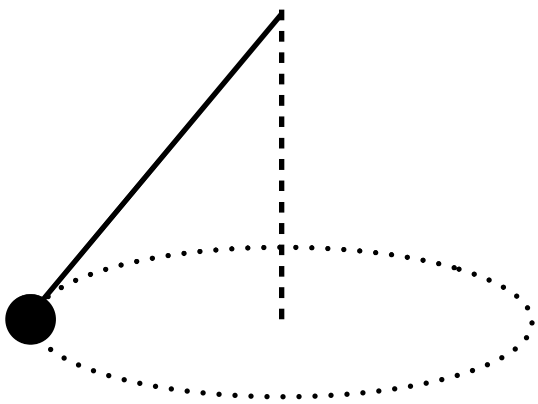
Sostituiamo ora l'espressione per T_r nella seconda eq. cardinale per il disco, tenendo conto che $r\dot{\omega} = -\frac{g}{3}$ ed otteniamo l'equazione risolvente:

$$-r\frac{2}{3}Mg = \frac{1}{2}MR^2\left(-\frac{g}{3r}\right) \Rightarrow r^2 = \frac{R^2}{4} \Rightarrow \boxed{r = \frac{R}{2}}.$$

Problema 21

Sia dato un pendolo conico di lunghezza L e massa m in moto lungo una circonferenza. Determinare l'angolo del filo rispetto alla verticale nel caso in cui il modulo della tensione valga il doppio del modulo della fora peso. Determinare anche il modulo della velocità.

Soluzione



Il moto del punto materiale è circolare uniforme e la sua traiettoria giace su un piano parallelo al suolo. Il punto è soggetto alla forza peso $\vec{P}$ ed alla tensione del cavo $\vec{T}$. La sua accelerazione è centripeta ed è diretta verso il centro della traiettoria. La proiezione della $\vec{F} = m\vec{a}$ della direzione verticale $\hat{k}$ sarà

$$\hat{k} \cdot \vec{F} = 0$$

poiché il vettore accelerazione giace sul piano della traiettoria e non ha componenti lungo $\hat{k}$. Dunque nella direzione verticale a si avrà

$$-mg + T\cos\alpha = 0 \Rightarrow T = \frac{mg}{\cos\alpha}$$

essendo α l'angolo formato dal filo e dalla verticale. Per ipotesi $T = 2mg$ e quindi:

$$2mg = \frac{mg}{\cos\alpha} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60^\circ .$$

In direzione radiale invece la forza peso non da contributo e la $\vec{F} = m\vec{a}$ prende la seguente forma:

$$T\sin\alpha = m\frac{v^2}{R}$$

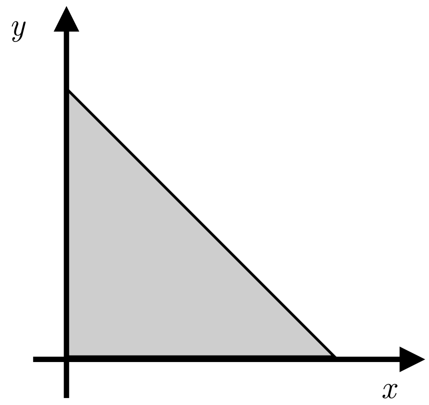
dove R è il raggio della traiettoria e vale la relazione $R = L\sin\alpha$. Sostituendo le espressioni per T e per R otteniamo quindi la seconda equazione risolvente

$$\frac{mg}{\cos\alpha}\sin\alpha = m\frac{v^2}{L\sin\alpha} \Rightarrow v^2 = \frac{3Lg}{2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{3Lg}{2}} .$$

Problema 22

Sia data una superficie triangolare, metà di un quadrato di lato L , di massa M e densità superficiale uniforme σ . Determinare la posizione del centro di massa.

Soluzione



Scelto un sistema di riferimento come quello in figura è evidente che le coordinate x_{cm} ed y_{cm} del centro di massa del triangolo debbano essere uguali. Quindi calcoliamone una delle due, ad esempio x_{cm}. Per definizione, per un sistema discreto di n punti materiali

$$x_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{M}.$$

Passando ad un sistema continuo ed in particolare, nel caso in questione, ad una superficie, è necessario sostituire $m_i \to dm = \sigma dS$ e $\sum \to \int\int$. Parametrizzando $dS = dxdy$ allora risulterà:

$$x_{cm} = \frac{1}{M}\int_0^L dx \int_0^{L-x} dy\; x\sigma = \frac{\sigma}{M}\int_0^L dx\; x(L-x) = \frac{\sigma}{M}\left(\frac{L}{2}L^2 - \frac{L^3}{3}\right) = \frac{\sigma L^3}{6M} = \frac{L}{3}.$$

Problema 23

Nel sistema del laboratorio $(O'x'y'z')$ un disco rigido e omogeneo di massa M, spessore trascurabile e raggio R, rotola senza strisciare, con velocità angolare $\vec{\omega} = -\omega\hat{k}'$ di modulo ignoto, nel piano verticale (x', y') su una rotaia orizzontale scabra sotto l'azione di una forza costante $\vec{F} = F\hat{i}$ parallela alla rotaia e applicata al centro di massa C del disco. Determinare le seguenti quantità:

a) il modulo a_{cm} dell'accelerazione con la quale trasla il centro di massa del disco, applicando la seconda eq. cardinale della dinamica;

b) la componente tangenziale V_t della reazione vincolare espressa dalla rotaia;

c) la velocità istantanea del punto di contatto A del disco con la rotaia applicando la legge di composizione delle velocità, e situando l'origine del sistema di riferimento in moto ($(Cxyz)$ che si muove solidale con il disco) nel centro di massa C del disco stesso.

Soluzione

Il disco è soggetto alle seguenti forze esterne: la forza peso $\vec{P}$ applicata al centro del disco C, la forza $\vec{F}$ anch'essa applicata in C, la reazione vincolare della rotaia $\vec{\rho}$ che agisce nel punto di contatto del disco con la rotaia. La seconda equazione cardinale, scritta scegliendo il centro di riduzione in corrispondenza del punto di contatto del disco con la rotaia, riceve un solo contributo al momento delle forze esterne: quello della forza $\vec{F}$. Se l'asse x' è parallelo al suolo e diretto da sinistra destra e l'asse y' è perpendicolare al suolo diretto verso l'alto allora z' sarà uscente dal foglio. Il momento delle forze esterne è

$$\vec{N}_e = R\hat{j}' \wedge F\hat{i}' = -RF\hat{k}' .$$

Proiettando la seconda eq. cardinale nella direzione dell'asse di rotazione ($-\hat{k}'$) si ottiene

$$RF = I_A\dot{\omega}$$

con $I_A = \frac{MR^2}{2} + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2$. Quindi $\dot{\omega} = \frac{2F}{3MR}$ che indica un'accelerazione angolare in senso orario. L'accelerazione del centro di massa del disco sarà quindi da sinistra verso destra (in condizioni di rotolamento) e vale

$$\vec{a}_{cm} = R\dot{\omega} = \frac{2F}{3M}\hat{i}' \Rightarrow \boxed{\left\|\vec{a}_{cm}\right\| = \frac{2F}{3M}} .$$

Per determinare V_t si adotti la prima eq. cardinale. Proiettata nella direzione $\hat{i}\,'$ si otterrà:

$$F + \vec{\rho}\cdot\hat{i}\,' = M\frac{2F}{3M} \Rightarrow \boxed{\rho_{x'} = -\frac{F}{3} \equiv V_t}\,.$$

La velocità istantanea del punto di contatto si ottiene considerando l'effetto simultaneo di traslazione del centro di massa e di rotazione del disco intorno al centro di massa (allo stesso modo con cui si studia il moto di un cicloide). La velocità del punto di contatto è uguale alla somma della velocità del centro di massa nel sistema $(O'x'y'z')$ (ovvero della velocità di O nel sistema di riferimento $(O'x'y'z')$) e della velocità del punto A nel sistema di riferimento $(Cxyz)$. Se la velocità di C è $\vec{v}_C = v\,\hat{i}\,'$ la velocità di A in $(Cxyz)$, a causa del moto di rotolamento puro, è $\vec{v}_{A,C} = -\omega R\hat{i}$ con $\hat{i} = \hat{i}\,'$ e $\omega R = v$. Quindi

$$\vec{v}_A = \vec{v}_C + \vec{v}_{A,C} = 0\,.$$

Il risultato era atteso: in un moto di rotolamento puro, il punto di contatto con il suolo è infatti istantaneamente fermo.

Problema 24

Un sistema termodinamico è costituito da 5 moli di gas perfetto biatomico in equilibrio termodinamico con un termostato alla temperatura $T_0 = 20^{\circ}C$ e alla pressione p_0. Il gas viene poi fatto espandere fino a raggiungere la pressione $p_1 = p_0/10$. Sapendo che nel processo il termostato ha ceduto la quantità di calore $Q = 6\,kcal$ e ricordando il valore della costante universale dei gas $R = 8.314\,Jmol^{-1}K$ e che $1\,cal = 4.185\,J$, determinare i valori della seguenti quantità:

a) la variazione dell'entropia ΔS_{gas} subita dal gas,

b) la variazione dell'entropia ΔS_{term} subita dal termostato;

c) stabilire infine se la trasformazione è reversibile o irreversibile.

Soluzione

Il gas si trasforma rimanendo a contatto con il termostato. Quindi la sua temperatura finale sarà uguale a quella iniziale $T_f = T_0 = 293.15\ K$. Calcoliamo la variazione di entropia del gas sull'isoterma reversibile che congiunge gli stati iniziale e finale:

$$\Delta S_{gas} = \int_i^f \frac{\delta Q}{T}\bigg|_{rev} = \int_i^f \frac{pdV}{T} = \int_{V_i}^{V_f} \frac{nRdV}{V} = nR\ln\frac{V_f}{V_i} = nR\ln\frac{P_0}{P_1} = 5\times R\times \ln 10 \simeq 95.7\,.$$

Per il termostato vale un discorso simile:

$$\Delta S_{term} = \int_i^f \frac{\delta Q_{term}}{T}\bigg|_{rev} = -\frac{Q}{T_0} = -\frac{6\cdot 10^3\times 4.185J}{293.15\ K} \simeq -85.7\,.$$

Per verificare se la trasformazione è stata reversibile è sufficiente determinare la variazione di entropia dell'Universo:

$$\Delta S_U = \Delta S_{gas} + \Delta S_{term} = 95.7 - 85.7 = 10 > 0\,.$$

Essendo $\Delta S_U > 0$ allora la trasformazione è irreversibile.

Esercizio 25

Un disco con velocità angolare iniziale $\omega_0 = 2\ s^{-1}$ compie 40 giri per rallentare fino al completo arresto. Assumendo che il moto sia ad accelerazione angolare costante si calcoli il tempo di arresto.

Soluzione

Per ipotesi il moto è ad accelerazione angolare costante $-\alpha_0$ dove il segno negativo indica che, in particolare, il moto è decelerato. In modo analogo ad un moto uniformemente accelerato è possibile esprimere l'angolo di rotazione e la velocità angolare in funzione del tempo mediante le relazioni:

$$\begin{cases} \theta(t) = -\dfrac{1}{2}\alpha_0 t^2 + \omega_0 t \\ \omega(t) = -\alpha_0 t + \omega_0 \end{cases}.$$

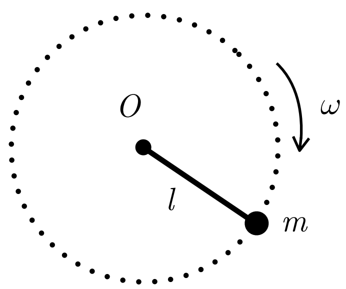
All'istante t_* in cui il disco si ferma si avrà $\theta(t_*) = 2\pi \times 40 = 80\pi$ e $\omega(t_*) = 0$. Le equazioni risolventi saranno quindi:

$$\begin{cases} \theta(t_*) = 80\pi = -\dfrac{1}{2}\alpha_0 t_*^2 + \omega_0 t_* \Rightarrow 80\pi = -\dfrac{1}{2}\dfrac{\omega_0}{t_*} t_*^2 + \omega_0 t_* \Rightarrow 80\pi = \dfrac{1}{2}\omega_0 t_* \Rightarrow \boxed{t_* = \dfrac{160\pi}{\omega_0} \simeq 251.3} \\ \omega(t_*) = 0 = -\alpha_0 t_* + \omega_0 \Rightarrow \alpha_0 = \dfrac{\omega_0}{t_*} \end{cases}.$$

Esercizio 26

Una massa $m = 1\,kg$ è collegata ad un filo inestensibile di lunghezza $l = 1\,m$ fissato in O su un piano orizzontale liscio. La massa si muove di moto circolare uniforme. Determinare, rispetto ad un sistema di riferimento solidale con la massa m, il vettore risultante sia delle forze reali che delle forze fittizie agenti sulla massa.

Soluzione



Nel sistema di riferimento con origine in O e, ad esempio, con l'asse x nella direzione del filo, il punto materiale appare fermo. Questo sistema di riferimento è non inerziale quindi la $\vec{F} = m\vec{a}$ si deve scrivere tenendo conto del contributo delle forze fittizie. Inoltre $\vec{a} = 0$ poiché il punto appare fermo. Ne segue che la somma delle forze reali e di quelle fittizie deve essere uguale a zero.

Le forze reali sono: la forza peso $\vec{P}$ diretta verso il suolo (perpendicolarmente al foglio ed entrante in esso), la reazione vincolare del piano orizzontale $\vec{\rho}$ (in verso opposto alla forza peso) e la tensione del cavo $\vec{T}$ diretta in modo centripeto (dal punto m verso O). Sarà inoltre $\vec{P} + \vec{\rho} = 0$ poiché non vi è moto in direzione ortogonale al foglio.

L'unica forza fittizia di cui è necessario tenere conto è la forza centrifuga $\vec{F}_C = -m\vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \vec{r}\right)$ che dipende da $\vec{\omega} \neq 0$ e da $\vec{r} = l\,\hat{i}$. Le altre forze fittizie sono nulle poiché dipendono rispettivamente dall'accelerazione di O (nulla), dall'accelerazione angolare (nulla) e dalla velocità di m nel sistema di riferimento non inerziale (nulla anch'essa perché m appare fermo). Se fissiamo il versore $\hat{k}$ ortogonalmente al foglio con verso uscente sarà $\vec{\omega} = -\omega\,\hat{k}$ e

$$\vec{F}_C = m\omega^2 l\,\hat{i}\ .$$

Dunque la risultante delle forze reali è $\vec{F}_R = \vec{T} = -T\,\hat{i}$, la risultante delle forze fittizie è

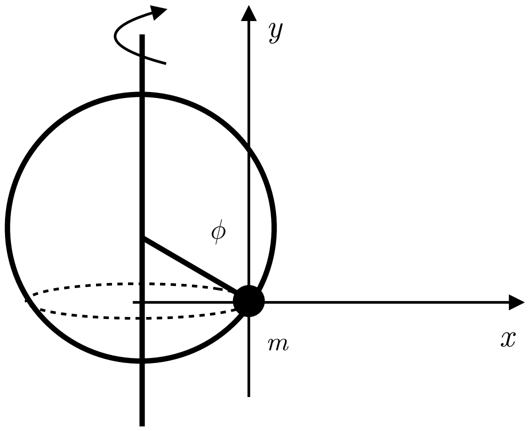
$$\vec{F}_F = m\omega^2 l\,\hat{i}\ .$$

Dovrà inoltre essere $\vec{F} = \vec{F}_R + \vec{F}_F = 0 \Rightarrow T = m\omega^2 l$.

Esercizio 27

Una pallina di massa $m = 10\ g$ è vincolata a muoversi su una guida a forma di anello circolare di raggio $R = 10\ cm$ posta in un piano verticale. L'anello è posto in rotazione attorno al suo diametro verticale con una velocità angolare $\omega = 14\ s^{-1}$. Calcolare l'angolo rispetto alla verticale in cui si trova la pallina in condizioni di equilibrio.

Soluzione



L'angolo da calcolare è ϕ . Il punto materiale ruota di moto circolare uniforme sulla traiettoria tratteggiata in figura di raggio $r = R\sin\phi$. La sua accelerazione, nel sistema di riferimento inerziale solidale con il suolo, è quella centripeta $\vec{a} = \omega^2 r\left(-\hat{i}_r\right)$. Il versore $\hat{i}_r$ punta dal centro della circonferenza tratteggiata al punto materiale.

Il punto è soggetto alla forza peso $\vec{P}$, diretta verso il suolo, ed alla reazione vincolare dell'anello $\vec{\rho}$, diretta verso il centro dell'anello. Se $\hat{j}$ è un versore perpendicolare al suolo che punta verso l'alto allora:

$$\vec{P} = -mg\ \hat{j}$$

e

$$\vec{\rho} = \rho_y \hat{j} + \rho_r \hat{i}_r = \rho\cos\phi\ \hat{j} - \rho\sin\phi\ \hat{i}_r .$$

La $\vec{F} = m\vec{a}$ avrà quindi la seguente forma:

$$-mg\ \hat{j} + \rho\cos\phi\ \hat{j} - \rho\sin\phi\ \hat{i}_r = m\omega^2 r\left(-\hat{i}_r\right)$$

e, per componenti:

$$\begin{cases} -mg + \rho\cos\phi = 0 \\ \rho\sin\phi = m\omega^2 R\sin\phi \end{cases} .$$

La seconda equazione ha sempre soluzione per $\phi = 0 \Rightarrow \sin\phi = 0$ da cui, la prima avrà soluzione $\rho = mg$. Inoltre si avrà una soluzione per $\phi \neq 0$ che si ottiene semplificando $\sin\phi$ nella seconda equazione e sostituendo nella prima:

$$\begin{cases} -mg + m\omega^2 R\cos\phi = 0 \Rightarrow \cos\phi = \dfrac{g}{\omega^2 R} \, . \\ \rho = m\omega^2 R \end{cases}$$

L'equazione trigonometrica ottenuta

$$\cos\phi = \frac{g}{\omega^2 R}$$

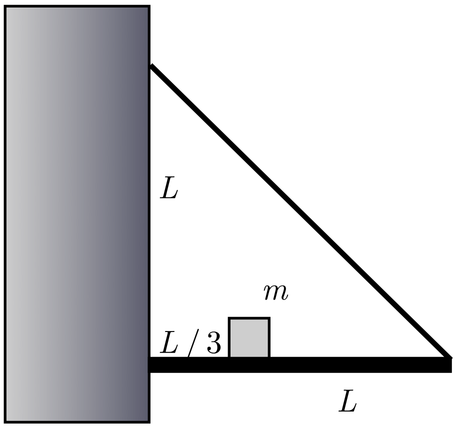
ha soluzione solo se il suo lato destro è compreso fra -1 ed 1 e, nello specifico, essendo g , ω^2 , R positivi, solo se il suo lato destro è compreso fra 0 ed 1 . In questo caso si avrà quindi

$$\phi = \arccos\frac{g}{\omega^2 R} \simeq 60^\circ \, .$$

Esercizio 28

Un'asta di lunghezza $L = 50\,cm$ e massa $M = 0.5\,kg$ è incernierata in un estremo ad un muro tramite un perno privo di attrito, mentre l'altro estremo è tenuto orizzontalmente da una corda fissata al muro a a distanza L . Una massa $m = 2\,kg$ è posta a distanza $L\,/\,3$ dal perno. Calcolare, in condizioni di equilibrio statico, la tensione della fune.

Soluzione



In condizioni di equilibrio statico il momento delle forze esterne applicate al sistema asta +massa m è nullo. Il sistema è soggetto alla forza peso (quella dell'asta, $\vec{P}$, e quella della massa m, $\vec{p}$) alla reazione vincolare della parete $\vec{\rho}$ e alla tensione della corda $\vec{T}$. La corda, in particolare, forma un angolo di 45° con l'asta.

Si introducano due versori $(\hat{\imath}, \hat{\jmath})$, appartenenti ad una terna destrorsa, tali che $\hat{\imath}$ sia parallelo al suolo diretto da sinistra a destra, e $\hat{\jmath}$ sia perpendicolare al suolo e diretto verso l'alto. Il terzo vettore della terna, $\hat{k}$, sarà ortogonale al foglio ed uscente dal foglio stesso.

Si fissi il centro di riduzione nel punto in cui l'asta è vincolata alla parete in modo che la reazione vincolare $\vec{\rho}$ abbia braccio nullo e non dia contributo al momento totale delle forze. Il momento totale sarà quindi:

$$\vec{N} = -\frac{L}{3}\hat{\imath} \wedge mg\,\hat{\jmath} - \frac{L}{2}\hat{\imath} \wedge Mg\,\hat{\jmath} + L\,\hat{\imath} \wedge \vec{T} = \left(-\frac{Lmg}{3} - \frac{LMg}{2} + LT\sin 135^\circ\right)\hat{k}$$

e proiettata lungo $\hat{k}$ otteniamo l'equazione risolvente:

$$-\frac{Lmg}{3} - \frac{LMg}{2} + \frac{\sqrt{2}LT}{2} = 0 \Rightarrow \boxed{T = \sqrt{2}\left(\frac{m}{3} + \frac{M}{2}\right)g}.$$

Esercizio 29

Dato il campo di forze $\vec{F}(x,y,z) = \alpha y\ \hat{i} + \beta x\ \hat{j} + \alpha z\ \hat{k}$ determinare:

a) le dimensioni fisiche della costanti α e β;

b) per quali valori delle costanti α e β il campo di forze è conservativo e calcolarne in quei casi l'energia potenziale;

c) determinare il lavoro compiuto dalla forza conservativa con $\alpha = 4$ (nelle sue unità di misura) quando sposta il punto di applicazione da A, di coordinate $(0,4,1)m$ a B, di coordinate $(2,1,2)m$.

Soluzione

I versori sono adimensionali, x, y, z hanno le dimensioni di una lunghezza. Le dimensioni di una forza sono $\left[F\right] = MLT^{-2}$ quindi

$$\left[\alpha\right] = \left[\beta\right] = MT^{-2}.$$

Per verificare se il campo è conservativo è necessario determinare il rotore del campo:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\hat{i} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\hat{j} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\hat{k} =$$

$$= 0\hat{i} + 0\hat{j} + \left(\beta - \alpha\right)\hat{k} = \left(\beta - \alpha\right)\hat{k}.$$

Il campo è conservativo se il rotore è nullo ovvero se $\alpha = \beta$. In questo caso per calcolare l'energia potenziale ricordiamo che $V_O - V_E = L_{O\to E} = \int_O^E \vec{F} \cdot d\vec{s}$ con

$$\vec{F}(x,y,z)=\alpha\left(y\ \hat{i}+x\ \hat{j}+z\ \hat{k}\right).$$

Eseguiamo l'integrazione su una spezzata che congiunge l'origine (O) con il generico punto $E=(x,y,z)$. La spezzata è composta da tre spostamenti rettilinei rispettivamente paralleli ai tre assi: il primo spostamento andrà da $O:(0,0,0)$ a $C:(x,0,0)$, il secondo da $C:(x,0,0)$ a $D:(x,y,0)$ ed il terzo da $D:(x,y,0)$ a $E:(x,y,z)$.

Primo spostamento $\boldsymbol{O\rightarrow C}$:

$$I_1=\int_0^x \alpha\, y'\Big|_{\substack{y'=0\\ z'=0}} dx'=0\ ;$$

secondo spostamento $\boldsymbol{C\rightarrow D}$:

$$I_2=\int_0^y \alpha\, x'\Big|_{\substack{x'=x\\ z'=0}} dy'=\alpha xy\ ;$$

terzo spostamento $\boldsymbol{D\rightarrow E}$

$$I_3=\int_0^z \alpha\, z'\Big|_{\substack{x'=x\\ y'=y}} dz'=\frac{1}{2}\alpha z^2\ .$$

Quindi:

$$V_O-V_E=\frac{\alpha}{2}\left(2xy+z^2\right)$$

e fissando arbitrariamente $V_O=0$ si ottiene:

$$V(x,y,z)=-\frac{\alpha}{2}\left(2xy+z^2\right).$$

Infine calcoliamo il lavoro per lo spostamento $\boldsymbol{A\rightarrow B}$:

$$L_{A\rightarrow B}=V_A-V_B=-\frac{\alpha}{2}\left(2\times 0\times 4+1^2\right)m^2+\frac{\alpha}{2}\left(2\times 2\times 1+2^2\right)m^2=\frac{\alpha}{2}\left(-1+8\right)m^2=\frac{7}{2}\alpha m^2\ ;$$

se $\alpha=4\ kg\,s^{-2}$ allora $L_{A\rightarrow B}=14\ J$.

Esercizio 30

Un punto materiale si muove secondo le equazioni orarie $x(t) = A\cos\omega t$, $y(t) = B\sin\omega t$, $z(t) = C$. Determinare l'espressione del coseno dell'angolo tra i vettori velocità ed accelerazione in funzione del tempo.

Soluzione

Note le componenti cartesiane del vettore posizione, derivando, si calcolano le componenti cartesiane dei vettori velocità ed accelerazione:

$$\begin{cases} \vec{v} = -A\omega\sin\omega t\ \hat{i} + B\omega\cos\omega t\ \hat{j} \\ \vec{a} = -A\omega^2\cos\omega t\ \hat{i} - B\omega^2\sin\omega t\ \hat{j} \end{cases}.$$

Il coseno dell'angolo tra i due vettori compare nella definizione implicita del prodotto scalare fra $\vec{v}$ e $\vec{a}$:

$$\vec{v}\cdot\vec{a} = \left\|\vec{v}\right\|\left\|\vec{a}\right\|\cos\theta_{av} = \left(\sqrt{A^2\omega^2\sin^2\omega t + B^2\omega^2\cos^2\omega t}\sqrt{A^2\omega^4\cos^2\omega t + B^2\omega^4\sin^2\omega t}\right)\cos\theta_{av}.$$

Lo stesso prodotto scalare si può anche calcolare direttamente in rappresentazione cartesiana:

$$\vec{v}\cdot\vec{a} = v_x a_x + v_y a_y + v_z a_z = \left(A^2 - B^2\right)\omega^3\sin\omega t\cos\omega t.$$

Eguagliando i due risultati e con un po' di semplificazioni si ottiene:

$$\cos\theta_{av} = \frac{\left(A^2 - B^2\right)\sin\omega t\cos\omega t}{\left(\sqrt{A^2\sin^2\omega t + B^2\cos^2\omega t}\sqrt{A^2\cos^2\omega t + B^2\sin^2\omega t}\right)}$$

o, espandendo il prodotto al denominatore

$$\cos\theta_{av} = \frac{\left(A^2 - B^2\right)\sin\omega t\cos\omega t}{\sqrt{\left(A^4 + B^4\right)\sin^2\omega t\cos^2\omega t + A^2B^2\left(\cos^4\omega t + \sin^4\omega t\right)}}.$$

Esercizio 31

Scrivere le equazioni cartesiane del moto di un punto materiale di massa m soggetto ad un campo di forze conservativo la cui energia potenziale è $V(x,y,z) = -\alpha z^2$, sapendo che all'istante $t = 0\ s$ il punto si trova nella posizione di coordinate $(0,0,z_0)$ con velocità $\vec{v} = v_0\hat{i}$. (Ricordare che la soluzione generale dell'equazione differenziale $\frac{d^2z}{dt^2} - kz = 0$ è $z(t) = c_1e^{\sqrt{k}t} + c_2e^{-\sqrt{k}t}$ con c_1 e c_2 costanti determinate dalle condizioni iniziali)

Soluzione

Il campo di forze cui è sottoposto il punto materiale è

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}V = 2\alpha z\,\hat{k}$$

e l'accelerazione in coordinate cartesiane è $\vec{a} = \ddot{x}\,\hat{i} + \ddot{y}\,\hat{j} + \ddot{z}\,\hat{k}$. Utilizzando la $\vec{F} = m\vec{a}$ componente per componente e risolvendo le equazioni differenziali corrispondenti si otterrà:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = 0 \\ m\ddot{y} = 0 \\ m\ddot{z} = 2\alpha z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dot{x}_0 t + x_0 \\ y = \dot{y}_0 t + y_0 \\ z = c_1e^{\sqrt{k}t} + c_2e^{-\sqrt{k}t} \end{cases}$$

in funzione delle condizioni iniziali $\dot{x}_0$, x_0 , $\dot{y}_0$, y_0 ,c_1 , c_2 e con $k = \frac{2\alpha}{m}$. Dalle ipotesi sappiamo che $\dot{x}_0 = v_0$, $x_0 = 0$, $\dot{y}_0 = 0$, $y_0 = 0$, $\dot{z}_0 = 0$, $z_0 \neq 0$ quindi:

$$\begin{cases} x = v_0 t \\ y = 0 \\ z = c_1e^{\sqrt{k}t} + c_2e^{-\sqrt{k}t} \end{cases}$$

e c_1 , c_2 sono da determinare dalle condizioni iniziali su z :

$$\begin{cases} z(0) = z_0 = c_1 + c_2 \\ \dot{z} = \sqrt{k}c_1e^{\sqrt{k}t} - \sqrt{k}c_2e^{-\sqrt{k}t} \Rightarrow \dot{z}(0) = 0 = \sqrt{k}c_1 - \sqrt{k}c_2 \end{cases}$$

e quindi

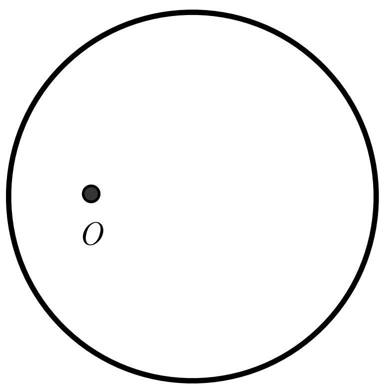
$$\begin{cases} c_1 + c_2 = z_0 \\ c_1 - c_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2c_1 = z_0 \\ c_1 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = \dfrac{z_0}{2} \\ c_2 = \dfrac{z_0}{2} \end{cases}.$$

Perciò la soluzione finale sarà:

$$\begin{cases} x = v_0 t \\ y = 0 \\ z = \dfrac{z_0}{2}\left(e^{\sqrt{\frac{2\alpha}{m}}t} + e^{-\sqrt{\frac{2\alpha}{m}}t}\right) \end{cases}.$$

Esercizio 32

Un disco omogeneo di massa M e di raggio R, disposto su di un piano verticale e libero di ruotare attorno ad un asse normale passante per la posizione eccentrica O, è trattenuto nella posizione iniziale indicata in figura con il diametro passante per O in posizione orizzontale. Determinare la distanza di O dal centro del disco affinché l'accelerazione iniziale del centro di massa, qualora il disco venisse liberato, valga $g/3$.



Soluzione

Il disco è soggetto alla forza peso ed alla reazione vincolare in O. Se fissiamo il centro di riduzione proprio in O e scriviamo la seconda equazione cardinale della dinamica otteniamo il seguente momento delle forze esterne

$$\vec{N}_e = d\,\hat{i} \wedge Mg\left(-\hat{j}\right) = -dMg\hat{k}$$

dove i versori $\hat{i}$ ed $\hat{j}$ sono ortogonali fra di loro e sono rispettivamente parallelo al suolo diretto da sinistra a destra, il primo, e perpendicolare al suolo e diretto dal basso verso l'alto, il secondo. La quantità d esprime la distanza fra il centro di riduzione scelto ed il centro del disco (ed è da determinare). Il versore $\hat{k}$, per la regola della mano destra, è uscente dal foglio.

Definiamo $\vec{\omega} = \omega\,\hat{\omega}$ dove $\hat{\omega}$ è un versore che scegliamo perpendicolare al foglio ed entrante nel foglio stesso. Questa scelta di $\hat{\omega}$ è tale che per $\omega > 0$ il vettore $\vec{\omega}$ è entrante nel foglio ed individua una rotazione in senso orario. Se proiettiamo la seconda eq. cardinale nella direzione $\hat{\omega}$ otteniamo:

$$\vec{N}_e \cdot \hat{\omega} = I\dot{\omega}$$

con $\vec{N}_e \cdot \hat{\omega} = \left(-dMg\hat{k}\right) \cdot \hat{\omega} = dMg$. Quindi

$$dMg = I\dot{\omega}$$

e I è il momento d'inerzia del disco rispetto al centro di riduzione scelto. Per Huygens-Steiner sarà

$I = \dfrac{MR^2}{2} + Md^2$ e la seconda eq. cardinale è

$$dMg = \left(\frac{MR^2}{2} + Md^2\right)\dot{\omega}\,.$$

L'accelerazione del centro di massa è data, in modulo, da $a_c = \dot{\omega}d$. Essa è nota per ipotesi:

$$a_c = \dot{\omega}d = \frac{g}{3} \Rightarrow \dot{\omega} = \frac{g}{3d}$$

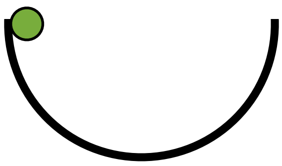
e sostituendo nell'eq. cardinale otteniamo l'eq. risolvente ed il risultato:

$$dMg = \left(\frac{MR^2}{2} + Md^2\right)\frac{g}{3d} \Rightarrow d^2 = \frac{R^2}{4} \Rightarrow \boxed{d = \frac{R}{2}}.$$

Esercizio 33

Un punto materiale di massa m, inizialmente in quiete, scivola senza attrito lungo un profilo semicircolare di raggio R disposto su di un piano verticale (vedi figura). Determinare la reazione vincolare fornita dal profilo quando il punto materiale transita nel punto A di minima quota.

Soluzione



Il punto materiale è soggetto alla forza peso $\vec{P}$ e alla reazione vincolare del profilo $\vec{\rho}$ lungo tutto il moto. In particolare nel punto A le due forze sono entrambe perpendicolari al suolo ed hanno versi opposti. In quel punto, perciò, anche l'accelerazione sarà perpendicolare al suolo e sarà centripeta rispetto alla traiettoria circolare su cui il punto è vincolato a muoversi. Sia $\hat{j}$ un versore perpendicolare al suolo e diretto verso l'alto, allora la $\vec{F} = m\vec{a}$ nel punto A avrà la forma:

$$-mg\,\hat{j} + \rho_A\,\hat{j} = m\frac{v_A^2}{R}\hat{j} \Rightarrow -mg + \rho_A = m\frac{v_A^2}{R}.$$

Per determinare v_A possiamo notare che l'energia meccanica totale del punto materiale si conserva lungo il moto poiché la forza peso è conservativa e la reazione vincolare $\vec{\rho}$ agisce perpendicolarmente allo spostamento del punto (e quindi non fa lavoro). Deve valere quindi la seguente relazione:

$$\frac{1}{2}mv_i^2 + mgh_i = \frac{1}{2}mv_A^2 + mgh_A \Rightarrow mgR = \frac{1}{2}mv_A^2 \Rightarrow \frac{v_a^2}{R} = 2g$$

e sostituendo l'ultima relazione nella $\vec{F} = m\vec{a}$ calcolata in A otteniamo l'equazione risolvente per ρ_A :

$$-mg + \rho_A = m\frac{v_A^2}{R} \Rightarrow -mg + \rho_A = 2mg \Rightarrow \boxed{\rho_A = 3mg}.$$

Esercizio 34

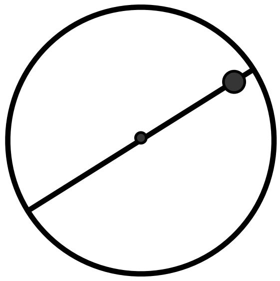
Un disco rigido ed omogeneo di massa M , spessore trascurabile e raggio R , ruota con una velocità angolare $\vec{\omega}_0$, mantenuta costante da un motore, nel piano orizzontale attorno all'asse verticale passante per il suo centro C . La superficie del disco è attraversata da una scanalatura lungo il diametro. All'istante $t = 0\ s$ un punto materiale di massa m si trova sul bordo del disco e si muove lungo la scanalatura dirigendosi verso il centro con velocità mantenuta costante di modulo v_0 nel sistema di riferimento solidale con il disco. Determinare le espressioni delle seguenti quantità:

a) i moduli del momento della quantità di moto del disco (K_C) e del punto materiale (k_C) in funzione del tempo t, scegliendo il centro C come centro di riduzione;

b) il modulo del momento risultante delle forze esterne $\left\|\vec{M}_C^e\right\|$ rispetto allo stesso centro di riduzione;

c) il lavoro L compiuto sul sistema dalla risultante delle forze applicate dall'istante $t = 0\ s$ all'istante t_0 nel quale il punto materiale passa per il centro del disco.

Soluzione



Il disco ruota con velocità angolare costante. Su di esso è praticata una scanalatura su cui scorre un punto materiale. Il punto ha una velocità costante $\vec{v}_0$, diretta verso il centro del disco, nel sistema di riferimento co-rotante con il disco. Quindi nel sistema di riferimento solidale con il suolo la velocità del punto sarà la somma della sua velocità rotazionale $\vec{v}_{Rot}$ (dovuta al movimento del disco) e della sua velocità rispetto al disco che è proprio $\vec{v}_0$.

Il modulo del momento della quantità di moto del disco è semplicemente

$$K_C = I_D \omega_0 = \boxed{\frac{MR^2}{2}\omega_0}$$

poiché $\vec{K}_C$ ha componenti solo lungo l'asse di rotazione. Il modulo del momento della quantità di moto del punto materiale sarà, istantaneamente uguale a $k_C = md^2$ dove d è la distanza fra il punto materiale e l'asse di rotazione. Questa distanza varia nel tempo poiché il punto materiale si avvicina al centro del disco con velocità costante ed in particolare sarà:

$$d = R - v_0 t\,.$$

Dunque:

$$\boxed{I_m = m\left(R - v_0 t\right)^2 \omega_0}\,.$$

Dalla seconda equazione cardinale applicata al sistema disco+punto materiale otteniamo facilmente l'espressione del momento delle forze esterne applicate al sistema. Esso sarà uguale alla derivata rispetto al tempo del momento totale della quantità di moto:

$$\left\|\vec{M}_C^e\right\| = \left|\frac{d}{dt}(k_C + K_C)\right| = \left|\frac{d}{dt}k_C\right| = \left|\frac{d}{dt}m\left(R - v_0 t\right)^2 \omega_0\right| = \boxed{\left\|2mv_0\omega_0\left(R - v_0 t\right)\right\|}\,.$$

Infine il lavoro compiuto dalle forze agenti sul sistema, per il teorema delle forze vive, sarà uguale alla variazione dell'energia cinetica totale:

$$L = T_f - T_i = \left(\frac{1}{2}I_D\omega_0^2 + \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}md_f^2\omega_0^2\right) - \left(\frac{1}{2}I_D\omega_0^2 + \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}md_i^2\omega_0^2\right)$$

e quindi

$$L = \left(\frac{1}{2}md_f^2\omega_0^2\right) - \left(\frac{1}{2}md_i^2\omega_0^2\right) = -\frac{1}{2}md_i^2\omega_0^2 = \boxed{-\frac{1}{2}mR^2\omega_0^2}\,.$$

Esercizio 35

Due moli di gas perfetto mono-atomico compiono un'espansione isoterma reversibile partendo da temperatura e volume iniziali $T_1 = 20^\circ C$ e $V_1 = 23\,l$ e triplicando il proprio volume. Motivando le risposte ed usando per la costante dei gas il valore $R = 8.314\ J\ mol^{-1}\ K^{-1}$ determinare le seguenti quantità:

a) il lavoro L compiuto dal gas;

b) la variazione di energia interna ΔU subita dal gas;

c) la variazione di entropia ΔS_g subita dal gas.

Soluzione

Al termine della trasformazione $T_f = T_i = (20 + 273.15)\,K = 293.15\,K$ (perché la trasformazione in questione è isoterma) e $V_f = 3V_i$ per ipotesi. Il lavoro compiuto dal gas è:

$$L = \int_i^f p\,dV = \int_{V_i}^{V_f} \frac{nRT_i}{V}dV = nRT_i \ln\frac{V_f}{V_i} = 2RT_i \ln 3 = (2\times 8.314\times 293.15 \ln 3)\,J\,.$$

Lungo una trasformazione isoterma di un gas perfetto l'energia interna non varia e quindi

$$\Delta U = 0\,.$$

La variazione di entropia del gas si calcola su una qualsiasi trasformazione reversibile che congiunga lo stato iniziale a quello finale:

$$\Delta S_{gas} = \int_i^f \left.\frac{\delta Q}{T}\right|_{rev}$$

ma la trasformazione isoterma in questione è una trasformazione reversibile quindi possiamo calcolare la variazione di entropia per questa trasformazione.

Su un'isoterma $dU = 0 \Rightarrow \delta Q = \delta L = pdV$ e quindi

$$\Delta S_{gas} = \int_i^f \frac{pdV}{T} = \int_{V_i}^{V_f} \frac{nRdV}{V} = nR\ln\frac{V_f}{V_i} = \left(2\times 8.314\ \ln 3\right) J\ K^{-1}.$$

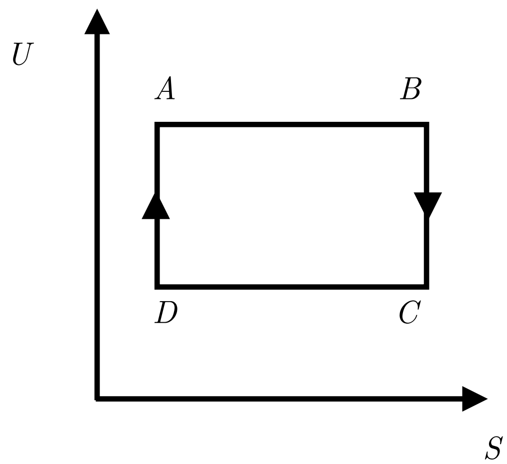
Esercizio 36

n moli di gas perfetto biatomico compiono una trasformazione ciclica reversibile $ABCD$ rappresentata nel piano (S,U) con un rettangolo avente i lati paralleli agi assi. Supponendo noti i valori S_A, S_C, U_A, U_C dell'entropia e dell'energia interna negli stati A e C, e per lo stato A il volume V_A e la pressione p_A, determinare le espressioni delle seguenti quantità:

a) il volume V_B;

b) la temperatura T_D

c) il rendimento η del ciclo;



Soluzione

Dalla figura è facile verificare che $S_B = S_C$, $U_B = U_A$, $S_D = S_A$, $U_D = U_C$.

Per determinare V_B si consideri la trasformazione reversibile $A \to B$:

$$U_B - U_A = nc_V\left(T_B - T_A\right) \Rightarrow U_A - U_A = \frac{5}{2}nR\left(T_B - T_A\right) \Rightarrow \boxed{T_B = T_A}$$

quindi i punti A e B sono su una isoterma e la variazione di entropia può essere calcolata sull'isoterma reversibile che li congiunge:

$$S_B - S_A = \int_A^B \frac{\delta Q}{T} = \int_A^B \frac{pdV}{T_A} = \int_A^B \frac{nRT_A dV}{T_A V} = nR\ln\frac{V_B}{V_A}$$

ed essendo noti S_A , $S_B = S_C$ e V_A determiniamo V_B:

$$V_B = V_A \exp\left(\frac{S_B - S_A}{nR}\right).$$

Passiamo a determinare T_D . La variazione di entropia tra D ed A è nulla quindi il calore scambiato durante la trasformazione reversibile che li congiunge è zero (trasformazione adiabatica).

Vale la relazione

$$U_A - U_D = \frac{5}{2}nR\left(T_A - T_D\right) \Rightarrow U_A - U_C = \frac{5}{2}nR\left(\frac{p_A V_A}{nR} - T_D\right) \Rightarrow \boxed{T_D = \frac{2}{5nR}\left(U_C - U_A\right) + \frac{p_A V_A}{nR}}.$$

Calcoliamo il rendimento del ciclo ovvero $\eta = L / Q_{ass}$.

Le due trasformazioni $A \to B$ e $C \to D$ sono isoterme. Quindi vale $\delta L = \delta Q$ (il lavoro fatto è uguale al calore assorbito) e

$$L_{AB} = Q_{AB} = \int_A^B p\,dV = nRT_A \ln\frac{V_B}{V_A} = T_A\left(S_B - S_A\right),$$

$$L_{CD} = Q_{CD} = \int_C^D p\,dV = nRT_D \ln\frac{V_D}{V_C} = T_D\left(S_D - S_C\right).$$

Si noti che $Q_{AB} = -Q_{CD}$ ed il calore su $C \to D$ è ceduto.

Le trasformazioni $B \to C$ e $C \to D$ sono adiabatiche quasi-statiche (e quindi reversibili) quindi $\delta Q = 0$ e $\delta L = -dU = -nc_V dT$. Siccome $T_B = T_A$ e $T_C = T_D$ le temperature iniziali e finali sono note e

$$L_{BC} = -\frac{5}{2}nR\left(T_C - T_B\right) = -\frac{5}{2}nR\left(T_D - T_A\right) = -\frac{5}{2}nR\left(\frac{2}{5nR}\left(U_C - U_A\right) + \frac{p_A V_A}{nR} - T_A\right) = U_A - U_C$$

$$L_{DA} = -\frac{5}{2}nR\left(T_A - T_D\right) = \frac{5}{2}nR\left(T_D - T_A\right) = U_C - U_A\,.$$

Quindi $L_{BC} = -L_{DA}$. Per ottenere il rendimento:

$$\eta = \frac{L_{AB} + L_{BC} + L_{CD} + L_{DA}}{Q_{ass}} = \frac{T_A\left(S_B - S_A\right) + T_D\left(S_D - S_C\right)}{T_A\left(S_B - S_A\right)} = \boxed{1 + \frac{T_D\left(S_D - S_C\right)}{T_A\left(S_B - S_A\right)}}.$$

Infine il lavoro totale compiuto dal gas è

$$L = L_{AB} + L_{BC} + L_{CD} + L_{DA} = T_A\left(S_B - S_A\right) + T_D\left(S_D - S_C\right).$$

Esercizio 37

Un aereo, in volo con velocità costante di modulo $v_0 = 900\,km/h$ ad una quota $h_0 = 2000\,m$, lascia cadere una massa m che deve colpire un punto al suolo che giace sulla parallela alla propria traiettoria. Determinare la distanza tra la verticale dell'aereo al momento del lancio e quella del bersaglio.

Soluzione

La massa lasciata cadere dall'aereo segue una traiettoria che può essere facilmente ricavata applicando la $\vec{F} = m\vec{a}$ e tenendo conto che m, durante la discesa verso terra, è soggetta solo alla forza peso (l'attrito dell'aria è trascurabile). Se y è la direzione verticale orientata positivamente verso l'alto ed x è la direzione orizzontale orientata come la velocità dell'aereo allora la traiettoria di m sarà:

$$\begin{cases} y(t) = -\dfrac{1}{2}gt^2 + h_0 \\ x(t) = v_0 t \end{cases}$$

dove abbiamo scelto l'origine dell'asse x in corrispondenza del piede della verticale dal punto di lancio. Il corpo arriva al suolo quando $y = 0$ ovvero all'istante t_* tale che

$$0 = -\frac{1}{2}gt_*^2 + h_0 \Rightarrow t_* = \sqrt{\frac{2h_0}{g}}.$$

A quell'istante la coordinata x di m sarà $x(t_*) = v_0\sqrt{\frac{2h_0}{g}}$ quindi per la scelta fatta di $x(0)$ la distanza fra le verticali in corrispondenza del punto di lancio e in corrispondenza del bersaglio sarà

$$d = x(t_*) - x(0) = \boxed{v_0\sqrt{\frac{2h_0}{g}}}.$$

Esercizio 38

Dato un punto materiale di massa m posto in un campo di forze la cui energia potenziale ha l'espressione $V(x, y, z) = \alpha y^2$ (con α costante positiva) e sapendo che al tempo $t_0 = 0$ il punto si trova in $P = (x_0, y_0, z_0)$ con velocità $\vec{v}_0 = v_0\hat{i}$, determinare:

a) la forza cui è soggetto il punto all'istante t_0;

a) le equazioni cartesiane del moto;

b) il lavoro fatto dalla forza dall'istante iniziale al tempo $t_1 = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{2\alpha}}$.

Soluzione

Nota l'espressione dell'energia potenziale del campo di forze possiamo determinare il campo di forze stesso:

$$\vec{F}(x,y,z) = -\vec{\nabla} V(x,y,z) = -\frac{\partial V}{\partial x}\hat{i} - \frac{\partial V}{\partial y}\hat{j} - \frac{\partial V}{\partial z}\hat{k} = -2\alpha y\ \hat{j}\ .$$

All'istante t_0 il punto di trova in P e la forza cui è soggetto sarà quindi

$$\boxed{\vec{F}(x_0, y_0, z_0) = -2\alpha y_0\ \hat{j}}\ .$$

Ora, scrivendo la $\vec{F} = m\vec{a}$ per componenti, otteniamo le equazioni cartesiane del moto:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = 0 \\ m\ddot{y} = -2\alpha y\ . \\ m\ddot{z} = 0 \end{cases}$$

La prima e la terza equazione differenziale definiscono un modo uniforme, la seconda un moto armonico. Date condizioni iniziali specificate in ipotesi (al tempo t_0) le equazioni sopraelencate si possono risolvere ed hanno le seguenti soluzioni

$$\begin{cases} x(t) = v_0 t + x_0 \\ y(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t \\ z(t) = z_0 \end{cases}$$

dove $\omega = \sqrt{\frac{2\alpha}{m}}$, A e B sono legate alle condizioni iniziali. In particolare, in questo caso, $A = y_0$ e $B = 0$. Quindi:

$$\boxed{\begin{cases} x(t) = v_0 t + x_0 \\ y(t) = y_0\cos\omega t \\ z(t) = z_0 \end{cases}}\ .$$

Per terminare calcoliamo il lavoro fatto dalla forza. La forza elastica è conservativa quindi il lavoro si può, ad esempio, calcolare mediante la variazione di energia potenziale. L'energia potenziale è, del resto, nota si dall'inizio! All'istante t_1 la coordinate y è

$$y(t_1) = y_0 \cos \omega t_1 = y_0 \cos\left(\sqrt{\frac{2\alpha}{m}} \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{2\alpha}}\right) = y_0 \cos\frac{\pi}{2} = 0 \, .$$

Quindi il lavoro sarà

$$L = V(t_0) - V(t_1) = \alpha y_0^2 - \alpha y_1^2 = \boxed{\alpha y_0^2} \, .$$

Esercizio 39

Una molla ideale di massa trascurabile e costante elastica $k = 45\ N / m$, è ferma su un piano orizzontale liscio. A un estremo è attaccata una massa $m = 100\ g$ mentre l'altro estremo è lasciato libero. Una seconda massa m si muove sullo stesso piano con velocità $v = 3\ m / s$ diretta lungo l'asse della molla fino ad urtarla nell'estremo libero. Calcolare:

a) la quantità di moto del sistema dopo l'urto;

b) l'energia immagazzinata dalla molla nell'istante di massima compressione;

c) la massima compressione della molla.

Raggiunta la massima compressione, la molla torna a distendersi fino ad acquisire nuovamente la lunghezza a riposo. In quell'istante la massa che l'ha urtata di stacca e prosegue il suo moto liberamente.

d) Calcolare la velocità delle due masse dopo il distacco.

Soluzione

La quantità di moto totale del sistema delle due masse si conserva durante tutto il processo. Anche l'energia meccanica totale del sistema, intasa come somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale elastica della molla è una quantità conservata. Il sistema si muove lungo un'unica direzione, fissiamo quindi l'asse x in corrispondenza di tale direzione e scegliamo l'orientamento dell'asse equiverso alla velocità iniziale: $\vec{v} = v\,\hat{i}$.

Inizialmente la quantità di moto totale è

$$\vec{Q}_{ini} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m\vec{v}$$

essendo uno dei due corpi fermo. L'energia iniziale sarà invece

$$E_{ini} = \frac{1}{2}mv^2$$

in quanto la molla è indeformata e l'energia elastica in essa accumulata è nulla.

Ad un certo istante il punto materiale in moto arriva a contatto della molla. Attraverso la molla la sua "spinta" si trasmette al punto fermo che inizia a muoversi con velocità crescente. Si noti che nei primi istanti la velocità del punto vincolato alla molla sarà minore rispetto alla velocità del secondo punto che si avvicinerà al primo deformando (e quindi accorciando) sempre di più la molla. Ad un certo istante i due punti si muovono con la stessa velocità $\vec{v}_m$. A questo istante la deformazione della molla è massima e vale Δx_m !

Mediante la conservazione dell'energia e della quantità di moto:

$$E_{ini} = E = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}k\Delta x^2 = mv_m^2 + \frac{1}{2}k\Delta x_m^2$$

$$\vec{Q}_{ini} = m\left(\vec{v}_m + \vec{v}_m\right) = m\vec{v} \Rightarrow v = v_m + v_m \Rightarrow v_m = v / 2$$

che sostituita nella prima delle due darà:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mv_m^2 + \frac{1}{2}k\Delta x_m^2 \Rightarrow \frac{1}{2}k\Delta x_m^2 = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{4}mv^2 \Rightarrow \boxed{\Delta x_m = \sqrt{\frac{mv^2}{2k}}}.$$

Abbiamo quindi la risposta ai primi 3 quesiti:

a) dopo l'urto $\boxed{\vec{Q} = \vec{Q}_{ini} = mv\,\hat{i} = (300\ g\cdot m/s)\hat{i} = (0.3\ kg\cdot m/s)\hat{i}}$ per la conservazione della quantità di moto;

b) $E_k = \frac{1}{2}k\Delta x_m^2 = \frac{1}{2}k\frac{mv^2}{2k} = \frac{mv^2}{4} = 0.1\ kg \times 9\ \frac{m^2}{s^2} \times \frac{1}{4} = \boxed{0.225\ J}$;

c) $\Delta x_m = \sqrt{\frac{mv^2}{2k}} = \sqrt{\frac{0.1\ kg \times 9\frac{m^2}{s^2}}{2\times 54\frac{N}{m}}} = \sqrt{\frac{0.1\ kg \times 9\frac{m^2}{s^2}}{2\times 54\frac{kg\cdot m}{m\cdot s^2}}} \simeq \boxed{0.091\ m}$.

Dopo il distacco le masse si muovono con velocità in generale differenti $\vec{v}_{1,f}$ e $\vec{v}_{2,f}$ ma comunque dirette come l'asse x. Per la conservazione di energia e quantità di moto varranno le seguenti relazioni

$$\begin{cases} mv = mv_{1,f} + mv_{2,f} \Rightarrow v = v_{1,f} + v_{2,f} \Rightarrow v - v_{1,f} = v_{2,f} \\ \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_{1,f}^2 + \frac{1}{2}mv_{2,f}^2 \Rightarrow v^2 = v_{1,f}^2 + v_{2,f}^2 \Rightarrow \boxed{v^2 - v_{1,f}^2 = (v - v_{1,f})^2} \end{cases}$$

e l'equazione evidenziata può essere risolta:

$$v^2 - v_{1,f}^2 = (v - v_{1,f})^2 \Rightarrow (v + v_{1,f})(v - v_{1,f}) = (v - v_{1,f})^2 \Rightarrow (v + v_{1,f}) = (v - v_{1,f}) \Rightarrow \boxed{v_{1,f} = 0}$$

e corrispondentemente $\boxed{v_{2,f} = v}$. Siccome le equazioni sono perfettamente simmetriche per scambio di $1 \leftrightarrow 2$ l'interpretazione dei pedici 1 e 2 è arbitraria. La soluzione si riferisce quindi a due casi:

i) la particella 1 è quella inizialmente in moto allora $\boxed{v_{1,f} = 0}$ indica che dopo l'urto essa è ferma e la particella 2, inizialmente ferma, ora si muove con velocità $\boxed{v_{2,f} = v}$

i) la particella 1 è quella inizialmente ferma allora $\boxed{v_{1,f} = 0}$ indica che dopo l'urto essa è ancora ferma e la particella 2, inizialmente in moto, continua a muoversi dopo l'urto con velocità $\boxed{v_{2,f} = v}$.

La seconda possibilità non è tuttavia fisicamente realizzabile quindi il caso i) è quello che si verifica fisicamente: $\boxed{v_f = 3\, m/s}$.

Esercizio 40

Tre bambini di massa m_1, m_2 ed m_3, giocano su di un'altalena schematizzabile come un'asta omogenea di massa $m_a = 100\, kg$ poggiante in O su di un perno centrale di massa trascurabile con quattro seggiolini posti simmetricamente a distanza $2/3L$ ed L con $L = 1.5m$ dal perno (vedi figura). Sapendo che le masse di due dei tre bambini valgono $m_1 = 25\, kg$ e $m_2 = 17\, kg$, calcolare

a) la massa m_3 del terzo affinché l'altalena sia in equilibrio;

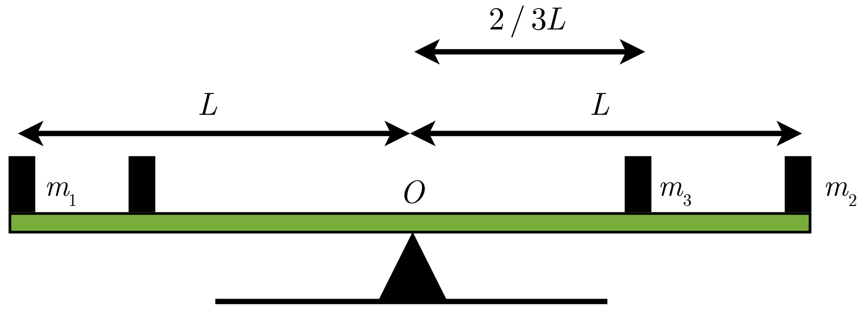
b) la reazione vincolare del perno sull'asta dell'altalena;

c) il momento d'inerzia del sistema rispetto ad un asse perpendicolare all'asta passante per O.

Se m_3 scende dall'altalena, calcolare:

d) la distanza del centro di massa del sistema dal perno lungo l'asta.

Soluzione



a) In condizioni di equilibrio statico il momento delle forze esterne è nullo. Se fissiamo il centro di riduzione in O e scegliamo una terna di versori $\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$ tali che $\hat{i}$ è parallelo a terra e diretto in verso uscente rispetto al foglio, $\hat{j}$ è parallelo a terra e diretto da sinistra verso destra, $\hat{k}$ è perpendicolare a terra diretto dal basso verso l'altro allora il suddetto momento sarà

$$\vec{M} = -L\hat{j} \wedge \left(-m_1 g\hat{k}\right) + L\hat{j} \wedge \left(-m_2 g\hat{k}\right) + \frac{2L}{3}\hat{j} \wedge \left(-m_3 g\hat{k}\right) = 0$$

ovvero, per componenti

$$Lm_1 g - Lm_2 g - \frac{2L}{3} m_3 g = 0 \Rightarrow \boxed{m_3 = \frac{3}{2}\left(m_1 - m_2\right) = 12\ kg}\ .$$

Si noti che la forza peso dell'altalena e la reazione vincolare del perno dell'asta non danno contributo al momento delle forze esterne perché applicate in O (e quindi con braccio nullo).

b) In condizioni di equilibrio statico anche la risultante delle forze esterne è uguale a zero:

c)

$$\vec{F}_{tot} = R\,\hat{k} - m_a g\,\hat{k} - m_1 g\,\hat{k} - m_2 g\,\hat{k} - m_3 g\,\hat{k} = 0$$

e quindi la reazione vincolare del perno è

$$\vec{R} = R\,\hat{k} \simeq \left(154\ kg\right) \times 9.81\ m/s^2\ \hat{k} = \boxed{\left(1510.74\ N\right)\hat{k}}\ .$$

c)Il momento d'inerzia del sistema è la somma dei momenti d'inerzia dell'asta e dei tre bambini:

$$I_{tot} = I_a + I_1 + I_2 + I_3 = \frac{m_a (2L)^2}{12} + m_1 L^2 + m_2 L^2 + m_3 \left(\frac{2L}{3}\right)^2 = \boxed{181.5\ kg\ m^2}$$

d) Il centro di massa del sistema si trova certamente in un punto dell'altalena. Nel sistema di riferimento cartesiano associato ai tre versori precedentemente introdotti e con origine in O questo significa che $x_{CM} = z_{CM} = 0$. L'unica coordinata non banale del centro di massa sarà y_{CM} . Quando m_3 scende dall'altalena:

$$y_{CM} = \frac{m_a \times 0 - L m_1 + L m_2}{m_a + m_1 + m_2} = L \frac{m_2 - m_1}{m_a + m_1 + m_2} = -1.5\ m \frac{8\ kg}{142\ kg} \simeq -0.0845\ m\ .$$

La distanza del centro di massa dal perno è quindi : $\boxed{d_{CM} = |y_{CM}| = 0.0845\ m}$.