1) Sono dati due vettori uguali in modulo $\vec{a}$ e $\vec{b}$ e formanti un certo angolo θ_{ab} . Calcolare $m = \|\vec{a}\| = \|\vec{b}\|$ sapendo che il modulo della loro somma vale 8 e che il modulo del loro prodotto vettoriale vale 3.

Soluzione

Risolviamo il problema in generale con $8 \rightarrow \sqrt{2\alpha^2}$ e $3 \rightarrow \beta$. Allora sarà:

$$\|\vec{a}+\vec{b}\|^2 = 2m^2 + 2m^2\cos\theta_{ab} = 2\alpha^2 ,$$

$$\|\vec{a} \wedge \vec{b}\| = m^2 \sin\theta_{ab} = \beta .$$

La prima equazione si può riscrivere come: $m^2\cos\theta_{ab} = \alpha^2 - m^2$. Elevando al quadrato entrambi i membri delle due equazioni ottenute e sommando membro a membro si avrà: $m^4\cos\theta_{ab}^2 + m^4\sin\theta_{ab}^2 = \left(\alpha^2 - m^2\right)^2 + \beta^2$. Il primo membro si semplifica tenendo conto che $\cos\theta^2 + \sin\theta^2 = 1$ e l'equazione diventa:

$$m^4 = \alpha^4 + m^4 - 2\alpha^2 m^2 + \beta^2 \Rightarrow m^2 = \frac{\beta^2 + \alpha^4}{2\alpha^2} \Rightarrow m = \sqrt{\frac{\beta^2 + \alpha^4}{2\alpha^2}} .$$

Nel caso in questione: $8 = \sqrt{2\alpha^2} \rightarrow \alpha^2 = 32$ e $\beta = 3$ quindi:

$$m = \sqrt{\frac{9 + (32)^2}{32}} \simeq 5.68 .$$

2) Sono dati due vettori uguali in modulo $\vec{a}$ e $\vec{b}$ e formanti un certo angolo θ_{ab} . Calcolare $m = \|\vec{a}\| = \|\vec{b}\|$ sapendo che il modulo della loro somma vale 6 ed il modulo della loro differenza vale 8.

Soluzione

Utilizzando le proprietà del prodotto scalare: s con $\|\vec{a}\| = \|\vec{b}\| = m > 0$:

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = 2m^2(1+\cos\theta_{ab}) = s^2$$

e

$$(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b}) = 2m^2(1-\cos\theta_{ab}) = d^2$$

che, sommate membro a membro danno:

$$4m^2 = s^2 + d^2 = 6^2 + 8^2 = 10^2 \Rightarrow m^2 = \frac{100}{4} = 25 \Rightarrow m = 5 \ .$$

Oppure, ragionando per via geometrica, si può notare che, costruendo con la regola del parallelogramma la somma e la differenza di due vettori uguali in modulo, si forma un rombo i cui lati sono i vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ e le diagonali sono $\vec{a}+\vec{b}$ e $\vec{a}-\vec{b}$. Le diagonali di un rombo sono perpendicolari fra di loro e dividono in rombo in 4 triangoli equilateri uguali. Ciascun triangolo equilatero ha l'ipotenusa uguale ad m ed ha i due cateti uguali a $s/2$ e $d/2$. Quindi, per il teorema di Pitagora: $m^2 = \left(\frac{s}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 \Rightarrow s^2 + d^2 = 4m^2$ che è il risultato ottenuto mediante il metodo precedente.

---

3) Sono dati i vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$. Il modulo del primo vettore sia $\|\vec{a}\| = 5$ e sia $\theta_{ab} = 2\pi/3$ l'angolo fra essi compreso. Determinare il modulo di $\vec{b}$, sapendo che il modulo di $\vec{s} = \vec{a} - \vec{b}$ è $\|\vec{s}\| = 8$.

<u>Soluzione</u>

Si calcoli formalmente il prodotto scalare $\vec{s} \cdot \vec{s} = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - 2\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos\frac{2\pi}{3} = \|\vec{s}\|^2$.

Sostituendo i valori noti per ipotesi di $\|\vec{a}\|$ e di $\|\vec{s}\|$ la precedente relazione diventa l'equazione risolvente per $\|\vec{b}\|$. Definendo $\|\vec{b}\| = x$ la relazione precedente diventa:

$$x^2 + 5x - 39 = 0$$

che, risolta, dà le seguenti soluzioni:

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{181}}{2} \ .$$

Ma $\|\vec{b}\| = x$ è una quantità positiva perché definisce il modulo di un vettore quindi l'unica soluzione accettabile è $\|\vec{b}\| = \frac{-5+\sqrt{181}}{2} \simeq 4.23$.

---

4) Sono dati due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$. Il modulo del primo vettore sia $\|\vec{a}\| = 5$ e sia $\theta_{ab} = \pi / 3$ l'angolo fra di essi compreso. Determinare il modulo del secondo vettore, $\|\vec{b}\|$, sapendo che il modulo di $\vec{s} = \vec{a} + 2\vec{b}$ è $\|\vec{s}\| = 10$.

---

5) Sono dati due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$. Il modulo del secondo vettore sia $\|\vec{b}\| = 10$ e sia $\theta_{ab} = \pi / 3$ l'angolo fra di essi compreso. Determinare il modulo del primo vettore, $\|\vec{a}\|$, sapendo che il modulo di $\vec{s} = \vec{a} + 2\vec{b}$ è $\|\vec{s}\| = 30$.

---

6) Dati due versori $\hat{a}$ e $\hat{b}$ che formano un angolo θ_{ab} calcolare tale angolo sapendo che il prodotto scalare dei due vettori $\vec{v}_1 = 2\hat{a} - \hat{b}$ e $\vec{v}_2 = \hat{a} - 3\hat{b}$ è nullo.

Soluzione

Determiniamo formalmente il prodotto scalare:

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = (2\hat{a} - \hat{b}) \cdot (\hat{a} - 3\hat{b}) = 2 + 3 - 7\hat{a} \cdot \hat{b} .$$

Quindi l'equazione risolvente sarà

$$5 - 7\cos\theta_{ab} = 0 \Rightarrow \cos\theta_{ab} = 5/7 \Rightarrow \theta_{ab} \simeq 44^{\circ} .$$

---

7) Dati due versori $\hat{a}$ e $\hat{b}$ che formano un angolo θ_{ab} calcolare tale angolo sapendo che il prodotto scalare dei due vettori $\vec{v}_1 = 4\hat{a} - \hat{b}$ e $\vec{v}_2 = 2\hat{a} - 3\hat{b}$ è nullo.

Soluzione

Determiniamo formalmente il prodotto scalare:

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = (4\hat{a} - \hat{b}) \cdot (2\hat{a} - 3\hat{b}) = 8 + 3 - 14\hat{a} \cdot \hat{b} .$$

Quindi l'equazione risolvente sarà

$$11 - 14\cos\theta_{ab} = 0 \Rightarrow \cos\theta_{ab} = 11/14 \Rightarrow \theta_{ab} \simeq 38^{\circ} .$$

---

8) Sono dati due vettori uguali in modulo $\vec{a}$ e $\vec{b}$, formanti u8n angolo θ_{ab}. Calcolare $m = \|\vec{a}\| = \|\vec{b}\|$ sapendo che il modulo della loro somma vale 24 ed il modulo della loro differenza vale 10.

Soluzione

$$\begin{cases} \left\|\vec{a}+\vec{b}\right\| = s \\ \left\|\vec{a}-\vec{b}\right\| = d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right) = 2m^2\left(1+\cos\theta_{ab}\right) \\ \left(\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right) = 2m^2\left(1-\cos\theta_{ab}\right) \end{cases}$$

quindi sottraendo membro a membro si ottiene:

$$s^2 + d^2 = 4m^2 \Rightarrow m = \frac{\sqrt{s^2+d^2}}{2}.$$

9) Sono dati due vettori uguali in modulo $\vec{a}$ e $\vec{b}$, formanti un angolo θ_{ab}. Calcolare $m = \|\vec{a}\| = \|\vec{b}\|$ sapendo che il modulo della loro somma vale 8 ed il modulo della loro differenza vale 6.

Soluzione

Vedere la soluzione dell'esercizio precedente.

10) Sono dati due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$, di modulo rispettivamente $\|\vec{a}\| = 5$, $\|\vec{b}\| = 9$ e formanti un angolo $\theta_{ab} = \pi/3$. Determinare il modulo di $\vec{s} = 2\vec{a} + \vec{b}$.

11) Sono dati due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$, di modulo rispettivamente $\|\vec{a}\| = 6$, $\|\vec{b}\| = 8$ e formanti un angolo $\theta_{ab} = \pi/3$. Determinare il modulo di $\vec{s} = \vec{a} - \vec{b}$.

12) Sono dati due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$, di modulo rispettivamente $\|\vec{a}\| = 5$, $\|\vec{b}\| = 6$ e formanti un angolo $\theta_{ab} = \pi/3$. Determinare il modulo di $\vec{s} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$.

Soluzione:

Il modulo di $\vec{s}$ si ottiene calcolando la radice quadrata del prodotto scalare di $\vec{s}$ con sé stesso:

$$\|\vec{s}\| = \sqrt{(2\vec{a}+3\vec{b})\cdot(2\vec{a}+3\vec{b})} = \sqrt{4\|\vec{a}\|^2 + 9\left\|\vec{b}\right\|^2 + 12\|\vec{a}\|\left\|\vec{b}\right\|\cos\theta_{ab}} = 2\sqrt{151} \simeq 24.6$$

13) Sono dati due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$, di modulo rispettivamente $\|\vec{a}\| = 5$, $\|\vec{b}\| = 8$ e formanti un angolo $\theta_{ab} = \pi/3$. Determinare il modulo di $\vec{s} = \vec{a} - 2\vec{b}$.

Soluzione:

Il modulo di $\vec{s}$ si ottiene calcolando la radice quadrata del prodotto scalare di $\vec{s}$ con sé stesso:

$$\|\vec{s}\| = \sqrt{(\vec{a}-2\vec{b})\cdot(\vec{a}-2\vec{b})} = \sqrt{\|\vec{a}\|^2 + 4\left\|\vec{b}\right\|^2 - 4\|\vec{a}\|\left\|\vec{b}\right\|\cos\theta_{ab}} = \sqrt{201} \simeq 14.2.$$

14) Sono dati due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$, di modulo rispettivamente $\|\vec{a}\| = 5$, $\|\vec{b}\| = 8$ e formanti un angolo $\theta_{ab} = \pi / 2$. Determinare il modulo di $\vec{s} = \vec{a} - 2\vec{b}$.

---

15) Sono dati due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$, di modulo rispettivamente $\|\vec{a}\| = 5$, $\|\vec{b}\| = 6$ e formanti un angolo $\theta_{ab} = \pi / 2$. Determinare il modulo di $\vec{s} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$.

---

1) Una moto si muove di moto uniforme in un circuito circolare con una velocità istantanea pari a $v = 120\ km/h$. Sapendo che il modulo dell'accelerazione della moto è $\|\vec{a}\| = 2\ m/s^2$ determinare il tempo che la moto impiega per compiere un giro completo del circuito. Esprimere il risultato in secondi.

Soluzione

Il moto è circolare uniforme quindi l'accelerazione è solo centripeta. Quindi vale la relazione $\|\vec{a}\| = \frac{v^2}{R}$ essendo R il raggio della traiettoria. Il tempo impiegato a percorrere un giro a velocità costante (in modulo) sarà:

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi v^2}{v\|\vec{a}\|} = \frac{2\pi v}{\|\vec{a}\|} = \frac{2\pi \frac{120}{3.6} m/s}{2\ m/s^2} \simeq 104.72\ s\ .$$

2) La legge oraria di un punto materiale è data da $s(t) = 3b\,t^2$. Determinare $v(1\,s)$ essendo sapendo che l'accelerazione vale $12\ m/s^2$.

Soluzione

La legge oraria è quella di un moto uniformemente accelerato e quindi:

$$v(t) = 6bt\ , \quad a = 6b = 12\ m/s^2 \Rightarrow b = 2\ m/s^2\ .$$

Infine

$$v(1\,s) = 6b(1\,s) = 6 \cdot 2\,\frac{m}{s^2} \cdot 1\,s = 12\ m/s\ .$$

3) Un'auto si muove di moto uniforme in un circuito circolare con una velocità istantanea pari a $v = 100\ km/h$. Sapendo che il modulo dell'accelerazione dell'auto è $\|\vec{a}\| = 2\ m/s^2$ determinare la lunghezza del circuito. Esprimere il risultato in metri ed in chilometri.

Soluzione

L'auto si muove di moto uniforme (quindi con velocità costante in modulo). Il circuito è circolare quindi vi è un'accelerazione centripeta di modulo pari a $\|\vec{a}\|$ tale che $\frac{v^2}{R} = \|\vec{a}\|$ dove R è il raggio del circuito. Quindi la lunghezza del circuito sarà

$$l = 2\pi R = 2\pi \frac{v^2}{\|\vec{a}\|} \simeq 0.24 \cdot 10^4 \, m = 2.4 \, km \, .$$

4) La legge oraria di un punto materiale è data da $s(t) = a\,t^2 + (2\,s)\,a\,t$. Determinare a essendo $v(6\,s) = 42\,m/s$.

Soluzione

La velocità in funzione del tempo è

$$v(t) = 2\,a\,t + (2\,s)\,a \, .$$

All'istante $t = 6\,s$ vale la relazione:

$$v(6\,s) = 12\,a\,s + 2\,s\,a = 14\,a\,s = 42\frac{m}{s} \Rightarrow a = \frac{42}{14}\frac{m}{s^2} = 3\frac{m}{s^2} \, .$$

5) La legge oraria di un punto materiale è data da $s(t) = a\,t^2 + (2\,s)\,a\,t + 4m$. Determinare a essendo $v(2\,s) = 12\,m/s$.

Soluzione

Derivando la legge oraria rispetto al tempo di ottiene

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = 2\,a\,t + (2s)\,a\,t$$

che, valutata a $t = 2\,s$ diventa

$$12\,m/s = 6\,a\,s \Rightarrow a = 2\,m/s^2 \, .$$

6) Un'auto si muove di moto uniforme in un circuito circolare con una velocità istantanea pari a $v = 20\,m/s$. Sapendo che il modulo dell'accelerazione dell'auto è $\|\vec{a}\| = 2\,m/s^2$ determinare la lunghezza del circuito.

Soluzione

Se il moto è uniforme allora il modulo del vettore velocità è costante e l'accelerazione vettoriale dell'auto ha solo componente normale. Quindi $\|\vec{a}\| = \frac{v^2}{R}$ dove R è il raggio del circuito. Risolvendo per R si ottiene

$$R = \frac{v^2}{\|\vec{a}\|} = 200\,m\ .$$

Noto R si calcola facilmente la lunghezza del circuito che è di forma circolare e quindi

$$l = 2\pi R \simeq 1257\,m\ .$$

---

7) Una motocicletta si muove di moto uniforme in un circuito circolare di raggio $R = 500\,m$ con una velocità istantanea pari a $v = 30\,m/s$. Determinare il modulo dell'accelerazione vettoriale della motocicletta.

---

8) La legge oraria di un punto materiale è data da $s(t) = a\,t^2 + (2\,s)a\,t + 4b$. Si determinino a e b sapendo che $s(0\,s) = 8\,m$ e $v(1\,s) = 4\,m/s$.

---

9) Un'auto percorre una curva con velocità costante $v = 20\,m/s$. Se il raggio di curvatura della curva è costante e pari a $R = 500\,m$ determinare il modulo dell'accelerazione vettoriale dell'auto.

---

10) La legge oraria di un punto materiale è data da $s(t) = (2\,s^{-1})a\,t^2 + 4a\,t + b$. Si determinino a e b sapendo che $s(0\,s) = 2\,m$ e $v(1\,s) = 4\,m/s$.

---

11) Due auto corrono sul un circuito lungo $4\,km$. La prima si muove con velocità pari a $100\,km/h$ e doppia la seconda dopo 10 giri. Si calcoli la velocità della seconda auto in m/s .

Soluzione

Quando la prima auto compie 10 giri la seconda è doppiata quindi ne avrà compiuti 9. Perciò per la prima auto vale che

$$v_1\,\Delta t = 40\,km$$

mentre per la seconda

$$v_2\,\Delta t = 36\,km\,.$$

Dividendo membro a membro si ottiene:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{40\,km}{36\,km} = \frac{10}{9} \Rightarrow v_2 = \frac{9}{10} v_1 = 90\,km/h\,.$$

Passando in m/s si ottiene

$$v_2 = 90\frac{1000}{3600} m/s = 25\,m/s\,.$$

12) La legge oraria di un punto materiale è data da $s(t) = a\,t^4 - 2b\,t + 3c$. Si determinino a, b, c sapendo che $s(0\,s) = 1\,m$, $v(0\,s) = 3\,m/s$ e che la velocità media dopo i primi $10\,s$ è $v_m = 2\,m/s$.

Soluzione

All'istante $t = 0\,s$ deve essere

$$s(0\,s) = 3c = 1\,m \Rightarrow c = \frac{1}{3} m\,.$$

Si determina poi la velocità istantanea

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = 4at^3 - 2b\,.$$

All'istante $t = 0\,s$ deve essere

$$v(0\,s) = -2b = 3\,m/s \Rightarrow b = -\frac{3}{2} m/s\,.$$

Calcoliamo infine la velocità media dopo $10\,s$:

$$v_m = \frac{s(10\,s) - s(0\,s)}{10\,s} = \frac{a\cdot(10\,s)^4 - 2b\cdot(10\,s) + 3c - 3c}{10\,s} = a\cdot(10\,s)^3 + 3\,m/s\,.$$

Questa velocità media deve essere $2\,m/s$ quindi:

$$a\cdot(10\,s)^3 + 3\,m/s = 2\,m/s \Rightarrow a = -10^{-3} m/s^4\,.$$

13) Due auto corrono su una strada rettilinea. La prima auto parte con $\Delta t = 5\min$ di ritardo rispetto alla seconda ma si muove con velocità doppia e la raggiunge dopo $20\,Km$. Si calcoli la velocità delle due auto in m/s.

Soluzione

Per la prima auto vale $v_1\Delta t_1 = 20\,km$ e per la seconda $v_2\left(\Delta t_1 + \Delta t\right) = 20\,km$. Dalla prima relazione

$$\Delta t_1 = \frac{20\,km}{v_1} = \frac{20\,km}{2v_2}$$

che, sostituita nella seconda ($\Delta t = 5\min = \frac{1}{12}h$), darà:

$$v_2\left(\frac{10\,km}{v_2} + \frac{1}{12}h\right) = 20\,km \Rightarrow v_2 = 120\,km/h\ .$$

Quindi $v_1 \simeq 66\,m/s$ e $v_2 \simeq 33\,m/s$.

---

14) La legge oraria di un punto materiale è data da $s(t) = 16a\,t^4 - b\,t + 5c$. Si determinino a, b, c sapendo che $s(0\,s) = 0\,m$, $v(0\,s) = 3\,m/s$ e che la velocità media dopo i primi $10\,s$ è $v_m = 2\,m/s$.

Soluzione

All'istante $t = 0\,s$ deve essere

$$s(0\,s) = 5c = 0\,m \Rightarrow c = 0\,m\ .$$

Si determina poi la velocità istantanea

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = 64at^3 - b\ .$$

All'istante $t = 0\,s$ deve essere

$$v(0\,s) = -b = 3\,m/s \Rightarrow b = -3\,m/s\ .$$

Calcoliamo infine la velocità media dopo $10\,s$:

$$v_m = \frac{s(10\,s) - s(0\,s)}{10\,s} = \frac{16\,a\cdot(10\,s)^4 - b\cdot(10\,s)}{10\,s} = 16\,a\cdot(10\,s)^3 + 3\,m/s\ .$$

Questa velocità media deve essere $2\,m/s$ quindi:

$$16\,a\cdot(10\,s)^3 + 3\,m/s = 2\,m/s \Rightarrow a = -\frac{1}{16}10^{-3}\,m/s^4\ .$$

---

15) Un'auto parte da ferma ed accelera per $\Delta t_1 = 10\,s$ con un'accelerazione pari a $a_0 = 2\,m/s^2$. Successivamente viaggia con velocità costante v_0 per $\Delta t_2 = 20\,s$. Determinare v_0, in km/h, e lo spazio Δs complessivamente percorso dall'auto nell'intervallo $\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2$, in km.

Soluzione

Lo spazio percorso nel primo intervallo di tempo è

$$\Delta s_I = \frac{1}{2} a_0 \Delta t_1^2$$

e la velocità al termine di tale intervallo è

$$\Delta v_I = a_0 \Delta t_1 \equiv v_0 = 20\, m/s = 72\, km/h\ .$$

Lo spazio percorso durante il secondo intervallo di tempo è

$$\Delta s_{II} = v_0 \Delta t_2 = a_0 \Delta t_1\, \Delta t_2$$

quindi lo spazio totale sarà

$$\Delta s = \frac{1}{2} a_0 \Delta t_1^2 + a_0 \Delta t_1\, \Delta t_2 = 500\, m = 0.5\, km\ .$$

16) La legge oraria di un punto materiale è data da $s(t) = 8a\,t^2 + 2b\,t + c$. Si determinino a , b , c sapendo che $s(0\,s) = 1\,m$, $v(0\,s) = 2\,m/s$, $s(10\,s) = 31\,m$.

Soluzione

Derivando lo spostamento si ottiene la velocità in funzione del tempo:

$$v(t) = 16a\,t + 2b\ ;$$

infine per ipotesi deve essere:

$$\begin{cases} s(0\,s) = 1\,m = c \\ v(0\,s) = 2\,m/s = 2b \Rightarrow b = 1\,m/s \\ s(10\,s) = 31\,m = 8\,a\,100\,s^2 + 2\dfrac{m}{s}10\,s + 1\,m \Rightarrow a = \dfrac{1}{80}\,m/s^2 \end{cases}\ .$$

17) Un'auto viaggia a velocità costante v_0 per $\Delta t_1 = 20\,s$ e successivamente inizia a rallentare con decelerazione costante pari ad $a_0 = -1\,m/s^2$ fermandosi dopo $\Delta t_2 = 5\,s$. Determinare v_0 , in km/h , e lo spazio Δs complessivamente percorso dall'auto nell'intervallo $\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2$, in km .

Soluzione

Lo spazio percorso dopo il primo intervallo di tempo è:

$$\Delta s_I = v_0 \Delta t_1 \,;$$

la variazione di velocità dopo il secondo intervallo di tempo è

$$\Delta v_{II} = a_0 \Delta t_2 = -v_0 \Rightarrow v_0 = 5\, m/s = 18\, km/h \,.$$

È ora possibile determinare lo spazio percorso dopo il secondo intervallo:

$$\Delta s_{II} = \frac{1}{2} a_0 \Delta t_2^2 + v_0 \Delta t_2$$

e quindi lo spazio totale

$$\Delta s = \Delta s_I + \Delta s_{II} = 112.5\, m = 0.1125\, km \,.$$

---

18) La legge oraria di un punto materiale è data da $s(t) = 5a\,t^2 + 2b\,t + 2c$. Si determinino a, b, c sapendo che $s(0\,s) = 2\,m$, $v(0\,s) = 4\,m/s$, $v(10\,s) = 5\,m/s$.

Soluzione

Derivando lo spostamento si ottiene la velocità in funzione del tempo:

$$v(t) = 10a\,t + 2b \,;$$

infine per ipotesi deve essere:

$$\begin{cases} s(0\,s) = 2\,m = 2c \Rightarrow c = 1\,m \\ v(0\,s) = 4\,m/s = 2b \Rightarrow b = 2\,m/s \\ v(10\,s) = 4\,m/s = 100\,s\,a + 4\dfrac{m}{s} \Rightarrow a = \dfrac{1}{100}\,m/s^2 \end{cases} .$$

---

19) Un'auto si muove di moto uniformemente decelerato con decelerazione pari ad $a = -2\,m/s^2$. Determinare la sua velocità iniziale sapendo che si ferma dopo aver percorso una distanza pari a $s = 100\,m$.

---

20) La legge oraria di un punto materiale è data da $s(t) = 8a\,t^2 + 2b\,t + c$. Si determinino a, b, c sapendo che $s(0\,s) = 2\,m$, $v(0\,s) = 4\,m/s$, $s(1\,s) = 11\,m$.

---

21) Un'auto parte da ferma e si muove di moto uniformemente accelerato con accelerazione $a = 2\,m/s^2$. Determinare lo spazio percorso quando raggiunge una velocità di $v = 50\,m/s$.

---

22) La legge oraria di un punto materiale è data da $s(t) = 3a\,t^2 + b\,t + 2c$. Si determinino a, b, c sapendo che $s(0\,s) = 2\,m$, $v(0\,s) = 4\,m/s$, $s(1\,s) = 5\,m$.

---

23) Un'auto si muove di moto uniformemente decelerato con decelerazione pari ad $a = -2\,m/s^2$. Determinare lo spazio che percorre prima di fermarsi sapendo che inizialmente ha una velocità $v_0 = 40\,m/s$.

Soluzione

Lo spazio percorso in funzione del tempo per il moto uniformemente decelerato in ipotesi è

$$s(t) = \frac{1}{2}a\,t^2 + v_0 t\,.$$

La velocità in funzione del tempo è

$$v(t) = a\,t + v_0\,.$$

Determiniamo, dall'espressione per la velocità, l'istante t_* in cui l'auto di ferma ovvero $v(t_*) = 0\,m/s$:

$$0 = a\,t_* + v_0 \Rightarrow t_* = -\frac{v_0}{a} = 20\,s\,.$$

A questo istante determiniamo infine lo spazio percorso:

$$s(t_*) = \frac{1}{2}a\frac{v_0^2}{a^2} - \frac{v_0^2}{a} = -\frac{v_0^2}{2a} = 400\,m\,.$$

---

24) La legge oraria di un punto materiale è data da $s(t) = a\,t^2 + 12b\,t + 4c$. Si determinino a, b, c sapendo che $s(0\,s) = 8\,m$, $v(0\,s) = 24\,m/s$, $s(1\,s) = 20\,m$.

Soluzione

Derivando la legge oraria si ottiene $v(t) = 2a\,t + 12b$. Imponiamo i vincoli dati sul moto e calcoliamo i tre parametri incogniti:

$$\begin{cases} s(0s) = 4c = 8\,m \Rightarrow c = 2\,m \\ v(0s) = 12b = 24\,m/s \Rightarrow b = 2\,m/s \\ s(1s) = a \cdot s^2 + 12 \cdot 2\dfrac{m}{s} \cdot s + 8\,m = 20\,m \Rightarrow a = -12\,m/s^2 \end{cases}.$$

25) Un'auto parte da ferma e si muove di moto uniformemente accelerato con accelerazione $a = 2\,m/s^2$. Determinare la velocità v dell'auto dopo che ha percorso una distanza $s = 100\,m$.

Soluzione

Lo spazio percorso in funzione del tempo per il moto accelerato in ipotesi è dato dall'espressione $s(t) = \frac{1}{2}a\,t^2$ e la velocità in funzione del tempo è $v(t) = a\,t$. L'istante t_* a cui lo spazio percorso è $100\,m$ si determina dalla prima espressione:

$$s(t_*) = \frac{1}{2}a\,t_*^2 = 100\,m \Rightarrow t_* = \sqrt{\frac{2 \cdot 100\,m}{2\,m/s^2}} = 10\,s.$$

A quell'istante determiniamo la velocità:

$$v(t_*) = a\,t_* = 20\,m/s.$$

26) La legge oraria di un punto materiale è data da $s(t) = 5a\,t^2 + 2b\,t + 2c$. Si determinino a, b, c sapendo che $s(0\,s) = 8\,m$, $v(0\,s) = 6\,m/s$, $s(1\,s) = 25\,m$.

Soluzione

Derivando la legge oraria si ottiene $v(t) = 10a\,t + 2b$. Imponiamo i vincoli dati sul moto e calcoliamo i tre parametri incogniti:

$$\begin{cases} s(0s) = 2c = 8\,m \Rightarrow c = 4\,m \\ v(0s) = 2b = 6\,m/s \Rightarrow b = 3\,m/s \\ s(1s) = 5a \cdot s^2 + 2 \cdot 3\dfrac{m}{s} \cdot s + 8\,m = 25\,m \Rightarrow a = \dfrac{11}{5}\,m/s^2 = 2.2\,m/s^2 \end{cases}.$$

27) Una motocicletta si muove di moto uniformemente decelerato con decelerazione pari ad $a = -2\,m/s^2$. Determinare il tempo necessario per fermarsi sapendo che lo spazio di frenata è $s = 20\,m$.

28) La legge oraria di un punto materiale è data da $s(t) = a\,t^2 + 12b\,t + 4c$. Si determinino a , b , c sapendo che $s(0\,s) = 8\,m$, $v(0\,s) = 24\,m/s$, $v(1\,s) = 20\,m/s$.

---

29) Un ciclista parte da fermo e si muove di moto uniformemente accelerato con accelerazione $a = 0.5\,m/s^2$. Determinare lo spazio percorso dal ciclista quando la sua velocità è $v = 5\,m/s$.

---

30) La legge oraria di un punto materiale è data da $s(t) = 5a\,t^2 + 2b\,t + 2c$. Si determinino a , b , c sapendo che $s(0\,s) = 8\,m$, $v(0\,s) = 6\,m/s$, $v(1\,s) = 26\,m/s$.

---

1) Un punto materiale viene lanciato da terra, verticalmente, con una velocità. in modulo, pari a v_0. Sapendo che tutti gli attriti sono trascurabili e che il punto raggiunge la quota massima $h_M = 30\ m$ determinare v_0. Esprimere il risultato in chilometri all'ora (km/h).

Soluzione

L'energia meccanica totale del punto si conserva durante il moto poiché gli attriti sono trascurabili. Dunque:

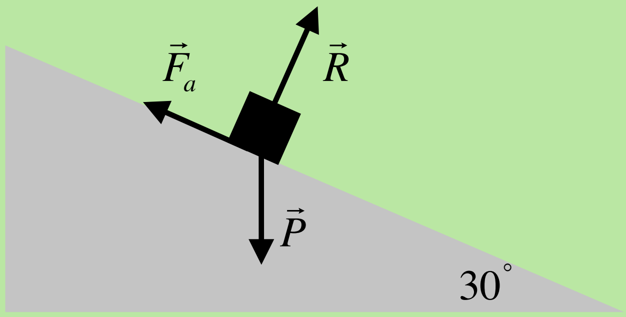
$$\frac{1}{2}mv_i^2 + mgh_i = \frac{1}{2}mv_f^2 + mgh_f .$$

Ma, all'istante iniziale il corpo è lanciato da terra ($h_i = 0$) e nel punto di quota massima la velocità è nulla ($v_f = 0$) quindi:

$$\frac{1}{2}mv_i^2 = mgh_f \Rightarrow v_i^2 = 2gh_f \Rightarrow v_i = \sqrt{2gh_f} \simeq 24.26\ m/s \simeq 87.34\ km/h .$$

2) Un corpo puntiforme di massa $M = 2\,kg$ é appoggiato ad un piano inclinato di 30° rispetto al suolo. A causa degli attriti il corpo è fermo , in condizioni di equilibrio statico. Determinare la reazione vincolare del piano inclinato. Esprimere il risultato in newton (N).

Soluzione



Le tre forze in gioco (vedi figura) sono la forza peso $\vec{P}$, la reazione vincolare del piano inclinato $\vec{R}$ e la forza di attrito statico $\vec{F}_a$. La loro risultante è nulla poiché, per ipotesi, il sistema è in equilibrio statico. Nella direzione di $\vec{R}$ la condizione di equilibrio sarà dunque:

$$R - mg\cos 30^{\circ} = 0 \Rightarrow R = 2kg \cdot 9.81\frac{m}{s^2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \simeq 16.99\,N\ .$$

3) Un punto materiale si trova, inizialmente fermo, su un piano inclinato rispetto al suolo di un angolo $\alpha = 30^{\circ}$ ad una quota $h = 2\,m$ da terra. Determinare la velocità del corpo quando arriva a terra ($h = 0\,m$) ipotizzando che tutti gli attriti siano trascurabili. Esprimere il risultato in chilometri all'ora (km/h).

Soluzione

L'energia meccanica totale del punto si conserva durante il moto:

$$E = cost = \frac{1}{2}mv_i^2 + mgh_i = \frac{1}{2}mv_f^2 + mgh_f\ .$$

All'istante iniziale $v_i = 0$ quindi:

$$mgh_i = \frac{1}{2}mv_f^2 + mgh_f \Rightarrow \frac{1}{2}mv_f^2 = mg(h_i - h_f) \Rightarrow v_f = \sqrt{2g(h_i - h_f)} = \sqrt{2\cdot 9.81\cdot 2}\,\frac{m}{s} \simeq 22.6\,km/h\ .$$

4) Un corpo puntiforme di massa $M = 10^{-2}\,kg$ é appoggiato ad un piano orizzontale perfettamente liscio. Il corpo è vincolato ad un punto P del piano da un cavo inestensibile, di massa trascurabile e lunghezza $L = 1\,m$. Determinare la tensione del cavo se il corpo ruota intorno al punto P compiendo 1 giro al secondo. Esprimere il risultato in newton (N).

Soluzione

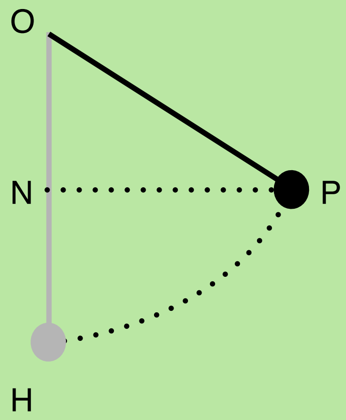
Il corpo si muove di moto circolare uniforme intorno al punto P. L'accelerazione centripeta è determinata dall'unica forza centripeta in gioco (la tensione del cavo). La relazione fra accelerazione centripeta e forza centripeta è data dal secondo principio della dinamica. Il modulo dell'accelerazione centripeta è $a_c = \omega^2 L$ dove ω è la velocità angolare del corpo ed è data da $\omega = \frac{2\pi}{1\,s}$.

Quindi:

$$T = Ma_c = 10^{-2}\,kg\left(\frac{2\pi}{1\,s}\right)^2 1\,m \simeq 3.95\cdot 10^{-1}\,N\ .$$

5) Un pendolo ideale di lunghezza $l = 1\,m$ e massa M è inizialmente tenuto fermo e forma con la verticale un angolo $\theta_0 = 60^\circ$. Ad un certo istante viene lasciato libero di muoversi. Determinare la velocità istantanea (in m/s) con cui il pendolo transita per la verticale al suolo.

Soluzione



L'energia meccanica totale intesa come la somma dell'energia cinetica del punto e della energia potenziale della forza peso si conserva. Matematicamente

$$E = \frac{1}{2} m\, v_i^2 + m\, g\, h_i = \frac{1}{2} m\, v_f^2 + m\, g\, h_f$$

dove i pedici "i" ed "f" indicano la configurazione iniziale e finale rispettivamente. Inizialmente il punto è fermo ($v_i = 0$) quindi:

$$\frac{1}{2} m\, v_f^2 = m\, g \left(h_i - h_f \right).$$

Il dislivello $h_i - h_f = \overline{NH}$ si può esprimere come

$$\overline{NH} = \overline{OP} \cos \widehat{HOP} = l \cos \theta_0 = l/2 \ .$$

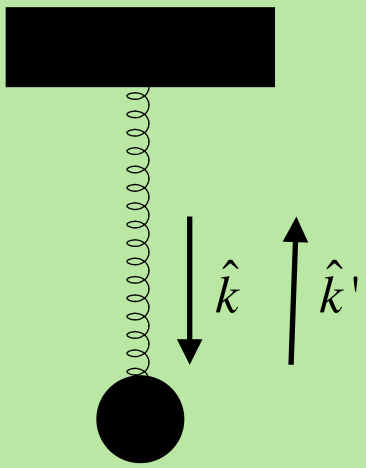
Quindi, risolvendo l'equazione di conservazione:

$$v_f = \sqrt{gl} \simeq 3.13\, m/s \ .$$

6) Determinare la deformazione $\Delta l = l - l_0$ di una molla di costante elastica $k = 10\, N/m$ appesa al soffitto in una sua estremità e a un punto materiale di massa $M = 2\, Kg$ nell'estremità opposta. Si

esprima tale deformazione in metri con il segno opportuno. (Disegnare la figura e fissare un opportuno versore con cui esprimere le grandezze vettoriali in gioco)

Soluzione



Se fissiamo come riferimento il versore $\hat{k}$ allora la forza peso agente sul punto si esprime come $\vec{P} = mg\hat{k}$ mentre la forza elastica si deve esprimere come $\vec{F}_k = -k\Delta l\,\hat{k}$ (espressione che tiene conto del fatto che $\vec{F}_k$ è verso l'alto quando $\Delta l > 0$). In condizioni di equilibrio statico la risultante delle due forze è nulla quindi :

$$\vec{F}_k + \vec{P} = 0 = mg\hat{k} - k\Delta l\,\hat{k} \Rightarrow \Delta l = \frac{mg}{k} \simeq 1.96\,m\ .$$

Se fissiamo come riferimento il versore $\hat{k}'$ allora la forza peso agente sul punto si esprime come $\vec{P} = -mg\hat{k}'$ mentre la forza elastica si deve esprimere come $\vec{F}_k = k\Delta l\,\hat{k}'$.

In condizioni di equilibrio statico la risultante delle due forze è nulla quindi :

$$\vec{F}_k + \vec{P} = 0 = -mg\hat{k}' + k\Delta l\,\hat{k}' \Rightarrow \Delta l = \frac{mg}{k} \simeq 1.96\,m\ .$$

Il risultato positivo indica che (ovviamente) la molla è allungata all'equilibrio.

7) Un uomo si tuffa in mare da un'altezza $h_0 = 15\,m$. Determinare la velocità (in km/h) con cui arriva a livello del mare supponendo che alla quota iniziale abbia velocità uguale a zero.

8) Determinare la deformazione $\Delta l = l - l_0$ di una molla di costante elastica $k = 20\,N/m$ appesa al soffitto in una sua estremità e ad un punto materiale di massa $M = 5\,kg$ nell'estremità opposta. Si esprima tale deformazione in metri con il segno opportuno.

---

9) Uno sciatore scende su un pendio d'inclinazione costante partendo da una quota $h_0 = 1500\,m$. Sapendo che lo sciatore parte dal fermo determinare la velocità (in km/h) con cui arriva alla quota $h_f = 1400\,m$.

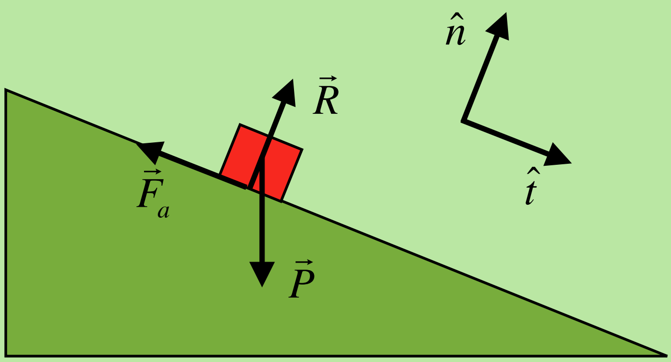
---

10) Determinare la deformazione $\Delta l = l - l_0$ di una molla di costante elastica $k = 30\,N/m$ vincolata al suolo in una sua estremità e ad un punto materiale di massa $M = 10\,kg$ all'estremità opposta. Si esprima tale deformazione in metri con il segno opportuno.

---

11) Un corpo si trova su un piano inclinato rispetto al suolo di un angolo $\alpha = 30^\circ$, in presenza di attrito radente dinamico. Il corpo scende verso il suolo con velocità costante; determinare il coefficiente di attrito dinamico μ.

Soluzione



Le forze agenti sul corpo sono la forza peso $\vec{P}$, la forza d'attrito dinamico $\vec{F}_a$ e la reazione vincolare del piano $\vec{R}$. Il corpo si muove con velocità costante quindi per il primo principio della dinamica la risultante di queste tre forze deve essere nulla

$$\vec{P} + \vec{F}_a + \vec{R} = 0 .$$

Se esprimiamo quest'ultima relazione in funzione dei versori $(\hat{n}, \hat{t})$ otteniamo:

$$-F_a\,\hat{t}+R\,\hat{n}+mg\sin\alpha\,\hat{t}-mg\cos\alpha\,\hat{n}=0\,.$$

Per componenti:

$$\begin{cases}-F_a+mg\sin 30^\circ=0\\ R-mg\cos 30^\circ=0\end{cases}\Rightarrow R=\frac{\sqrt{3}}{2}mg\,,\mu=\frac{\sqrt{3}}{3}\,.$$

12) Un satellite ruota su un'orbita circolare intorno alla terra ad una quota $h_0=1000\,km$. Si calcoli il modulo della sua velocità $\|\vec{v}_0\|$ in m/s .

Soluzione

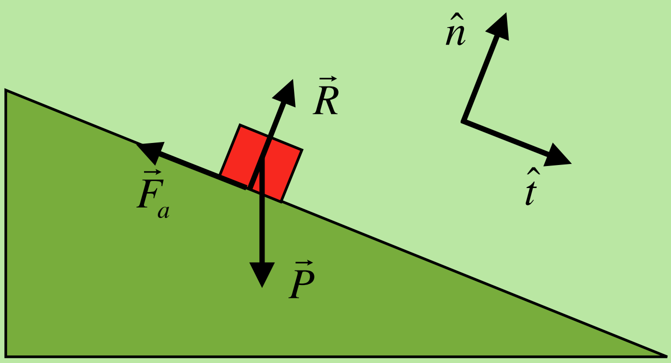
Rispetto ad un sistema di riferimento con centro al centro della terra il vettore posizione del satellite è $\vec{r}=r\,\hat{i}_r$. Il moto del satellite è circolare ed il satellite è soggetto alla sola forza di attrazione gravitazionale $\vec{F}=-\gamma\dfrac{m_sM_T}{R^2}\hat{i}_r$ dove R è il raggio dell'orbita. Ovviamente sarà $R=R_T+h_0$. L'accelerazione del satellite è solo centripeta $\vec{a}=-\dfrac{\|\vec{v}_0\|^2}{R}\hat{i}_r$. Scriviamo la $\vec{F}=m_s\vec{a}$:

$$-\gamma\frac{m_sM_T}{R^2}\hat{i}_r=-m_s\frac{\|\vec{v}_0\|^2}{R}\hat{i}_r\Rightarrow\gamma\frac{m_sM_T}{R^2}=m_s\frac{\|\vec{v}_0\|^2}{R}$$

quindi $\|\vec{v}_0\|=\sqrt{\gamma\dfrac{M_T}{R_T+h_0}}=7351\,m/s$.

13) Un corpo si trova su un piano inclinato rispetto al suolo di un angolo $\alpha=45^\circ$, in presenza di attrito radente statico. Il corpo è fermo; determinare il coefficiente di attrito statico f minimo che ammette questa condizione per il corpo.

Soluzione



Le forze agenti sul corpo sono la forza peso $\vec{P}$, la forza d'attrito statico $\vec{F}_a^{(s)}$ e la reazione vincolare del piano $\vec{R}$. Il corpo è fermo quindi per il primo principio della dinamica la risultante di queste tre forze deve essere nulla

$$\vec{P} + \vec{F}_a^{(s)} + \vec{R} = 0 .$$

Se esprimiamo quest'ultima relazione in funzione dei versori $(\hat{n}, \hat{t})$ otteniamo:

$$-F_a^{(s)}\,\hat{t} + R\,\hat{n} + mg\sin\alpha\,\hat{t} - mg\cos\alpha\,\hat{n} = 0 .$$

Per componenti:

$$\begin{cases} -F_a + mg\sin 45^\circ = 0 \\ R - mg\cos 45^\circ = 0 \end{cases} \Rightarrow R = \frac{\sqrt{2}}{2}mg\,, f = 1 .$$

---

14) Un satellite ruota su un'orbita circolare intorno alla luna ad una quota $h_0 = 50\,km$. Si calcoli il modulo della sua velocità $\|\vec{v}_0\|$.

Soluzione

Rispetto ad un sistema di riferimento con centro al centro della luna il vettore posizione del satellite è $\vec{r} = r\,\hat{i}_r$. Il moto del satellite è circolare ed il satellite è soggetto alla sola forza di attrazione gravitazionale

$$\vec{F} = -\gamma\frac{m_s M_L}{R^2}\hat{i}_r$$

dove R è il raggio dell'orbita. Ovviamente sarà $R = R_L + h_0$.

L'accelerazione del satellite è solo centripeta: $\vec{a} = -\frac{\|\vec{v}_0\|^2}{R}\hat{i}_r$. Scriviamo la $\vec{F} = m_s\vec{a}$:

$$-\gamma\frac{m_s M_L}{R^2}\hat{i}_r = -m_s\frac{\|\vec{v}_0\|^2}{R}\hat{i}_r \Rightarrow \gamma\frac{m_s M_L}{R^2} = m_s\frac{\|\vec{v}_0\|^2}{R}$$

quindi

$$\|\vec{v}_0\| = \sqrt{\gamma\frac{M_L}{R_L + h_0}} = 1656\,m/s .$$

---

15) Un punto materiale si trova fermo su un piano inclinato rispetto al suolo di un angolo $\alpha = 30^\circ$ ed ad una quota $h = 2\,m$ da terra. Determinare il tempo Δt necessario affinché il corpo arrivi a terra ($h = 0\,m$) ipotizzando che tutti gli attriti siano trascurabili. Esprimere il risultato in secondi (s).

Soluzione

La risultante delle forze agenti sul punto è

$$\vec{\mathcal{R}} = \vec{R} + \vec{P} = R\,\hat{n} + mg\sin\alpha\,\hat{t} - mg\cos\alpha\,\hat{n}$$

e l'accelerazione è tangenziale al piano e si può scrivere come

$$\vec{a} = \ddot{s}\,\hat{t} \ .$$

Quindi la seconda legge della dinamica sarà:

$$R\,\hat{n} + mg\sin\alpha\,\hat{t} - mg\cos\alpha\,\hat{n} = m\,\ddot{s}\,\hat{t}$$

che, proiettata nella direzione del moto $\hat{t}$ dà:

$$m\,\ddot{s} = mg\sin\alpha = \frac{mg}{2} \Rightarrow \ddot{s} = \frac{g}{2} \Rightarrow s(t) = \frac{g}{4}t^2 \ .$$

Il corpo arriva a terra quando ha percorso un tratto pari a

$$\Delta s = \frac{h}{\sin\alpha} = 2h \Rightarrow 2h = \frac{1}{4}g\Delta t^2 \Rightarrow \Delta t = \sqrt{\frac{8h}{g}} = 1.28\ s \ .$$

16) Un satellite ruota su un'orbita circolare intorno alla terra con una velocità in modulo pari a $\|\vec{v}_0\| = 1000\ km/h$. Determinare quanto dista l'orbita dal centro della terra. (esprimere il risultato in km)

Soluzione

La seconda legge della dinamica nella direzione radiale è

$$\gamma\frac{m_s\,M_T}{R^2} = m_s\frac{\|\vec{v}_0\|^2}{R} \Rightarrow R = \frac{\gamma\,M_T}{\|\vec{v}_0\|^2} = 5.16\cdot 10^6\ km \ .$$

17) Un punto materiale, ad un certo istante, si trova fermo su un piano inclinato rispetto al suolo di un angolo $\alpha = 60^\circ$, ad una quota $h = 10\ m$ da terra. Determinare il modulo della velocità v, in m/s, quando il corpo arriva a terra ($h = 0\ m$) ipotizzando che tutti gli attriti siano trascurabili.

Soluzione

Per la conservazione dell'energia meccanica del punto materiale

$$mgh_i = \frac{1}{2}mv_f^2 \Rightarrow v_f = \sqrt{2gh_i} \ .$$

18) Un satellite ruota su un'orbita circolare intorno alla luna con una velocità angolare in modulo pari a $\|\vec{\omega}_0\| = 10^{-1}\, s^{-1}$. Determinare quanto dista, in km, l'orbita dal centro della luna.

Soluzione

La seconda legge della dinamica nella direzione radiale è

$$\gamma \frac{m_s M_L}{R^2} = m_s |\omega_0^2| R \Rightarrow R^3 = \frac{\gamma M_L}{|\omega_0|^2} \Rightarrow R = \sqrt[3]{\frac{\gamma M_L}{|\omega_0|^2}} \Rightarrow R = 5.16 \cdot 10^6\, km\,.$$

19) Determinare la velocità al suolo di un grave che cade da una quota $h_0 = 100\, m$.

20) Determinare il raggio dell'orbita (in Km) di un satellite che ruota su una traiettoria circolare intorno alla terra con una velocità in modulo pari a $\|\vec{v}_0\| = 1000\, km/h$.

21) Determinare la quota massima raggiunta da un grave che viene lanciato verticalmente da terra con una velocità pari a $v_0 = 10\, m/s$.

22) Un satellite ruota su un'orbita circolare intorno alla luna con una velocità angolare in modulo pari a $\|\vec{\omega}_0\| = 10^{-3}\, s^{-1}$. Determinare il raggio dell'orbita del satellite in km.

23) Determinare la velocità al suolo di un punto materiale che scivola su un piano inclinato in assenza di attrito partendo da una quota $h_0 = 10\, m$.

Soluzione

In assenza di attrito l'energia meccanica del punto è conservata. Essa è uguale alla somma dell'energia cinetica del punto e dell'energia potenziale della forza peso. Si noti che la reazione vincolare del piano non fa lavoro (perché agisce ortogonalmente alla direzione del moto) quindi è ininfluente rispetto al calcolo dell'energia meccanica. All'istante iniziale l'energia cinetica del punto è zero (il punto è fermo), in fondo al piano sarà nulla l'energia potenziale quindi:

$$E = mgh_0 = \frac{1}{2} m v_f^2 \Rightarrow v_f = \sqrt{2gh_0} = 14\, m/s\,.$$

24) Determinare il raggio dell'orbita (in km) di un satellite che ruota su una traiettoria circolare intorno alla terra con una velocità in modulo pari a $\|\vec{v}_0\| = 100\ km/h$.

Soluzione

L'orbita del satellite è circolare (di raggio R da determinare) ed il suo moto è circolare uniforme. L'accelerazione del satellite è data dalla sola componente centripeta e, moltiplicata per m_s (la massa del satellite), essa è uguale alla forza agente sul satellite stesso (data dall'espressione della forza gravitazionale). Quindi:

$$m_s \frac{\|\vec{v}_0\|^2}{R} = \gamma \frac{m_s M_T}{R^2} \Rightarrow R = \gamma \frac{M_T}{\|\vec{v}_0\|^2} \simeq 5.16 \cdot 10^8\ km\ .$$

25) Un corpo puntiforme viene appoggiato ad un piano inclinato e quindi lanciato parallelamente al piano verso l'alto con una velocità, in modulo, pari a $v_0 = 20\ m/s$. Determinare, in assenza di attrito, la quota massima raggiunta dal corpo.

Soluzione

In assenza di attrito l'energia meccanica del corpo è conservata. Essa è uguale alla somma dell'energia cinetica del corpo puntiforme e dell'energia potenziale della forza peso. Si noti che la reazione vincolare del piano non fa lavoro (perché agisce ortogonalmente alla direzione del moto) quindi è ininfluente rispetto al calcolo dell'energia meccanica. All'istante iniziale l'energia potenziale del corpo è zero, nel punto di quota massima sarà nulla l'energia cinetica (il corpo è fermo) quindi:

$$E = \frac{1}{2} m v_0^2 = mgh_{MAX} \Rightarrow h_{MAX} = \frac{v_0^2}{2g} \simeq 20.4\ m\ .$$

26) Un satellite ruota su un'orbita circolare intorno alla luna con una velocità angolare in modulo pari a $\|\vec{\omega}_0\| = 10^{-8}\ s^{-1}$. Determinare il raggio dell'orbita del satellite in km.

Soluzione

L'orbita del satellite è circolare (di raggio R da determinare) ed il suo moto è circolare uniforme. L'accelerazione del satellite è data dalla sola componente centripeta e, moltiplicata per m_s (la massa del satellite), essa è uguale alla forza agente sul satellite stesso (data dall'espressione della forza gravitazionale). Quindi:

$$m_s \left\|\vec{\omega}_0\right\|^2 R = \gamma \frac{m_s M_L}{R^2} \Rightarrow R = \sqrt[3]{\gamma \frac{M_L}{\left\|\vec{\omega}_0\right\|^2}} \simeq 3.66 \cdot 10^6 \; Km \; .$$

27) Determinare la velocità al suolo di un punto materiale che scivola su un piano inclinato in assenza di attrito partendo da una quota $h_0 = 2\,m$.

---

28) Un satellite ruota su un'orbita circolare di raggio $R = 10^5 \; km$ intorno alla luna. Determinarne il modulo della velocità angolare (in s^{-1}).

---

29) Un uomo si tuffa in mare da un'altezza $h_0 = 10\,m$. Determinare la velocità con cui arriva a livello del mare.

---

30) Determinare la velocità (in m/s) di un satellite che ruota su una traiettoria circolare di raggio $R = 10^8 \; km$ intorno alla terra.
