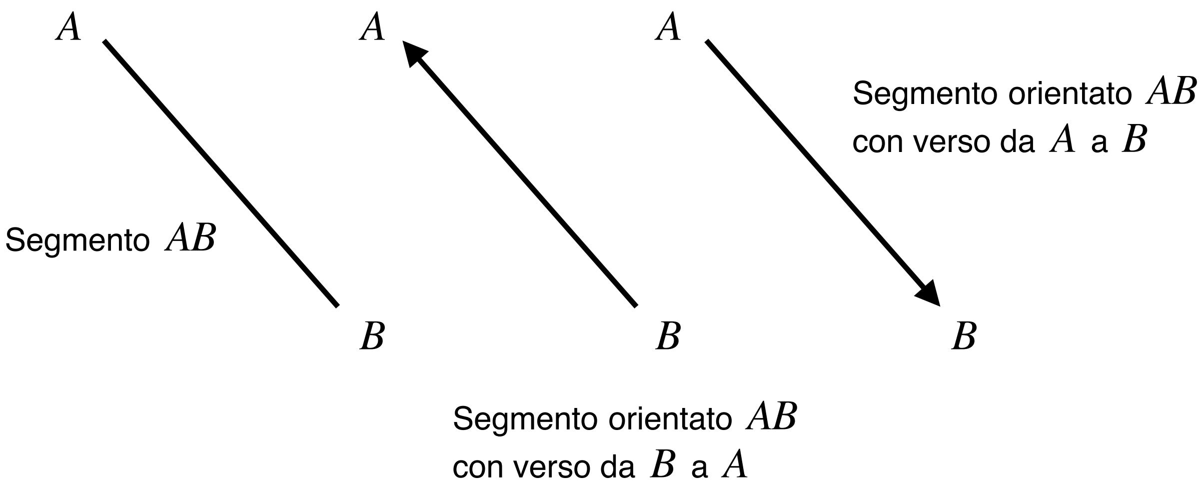
VETTORI

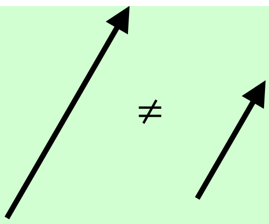
<u>*Definizione*</u>: Il vettore è un segmento orientato ovvero un segmento su cui è fissato un verso di percorrenza. Graficamente il verso del vettore è rappresentato da una freccia.



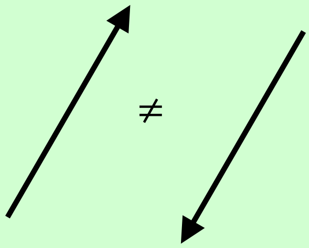
Dalla definizione segue che un vettore è specificato <u>univocamente</u> da tre proprietà che si chiamano modulo, direzione e verso:

- il <u>modulo</u> è la lunghezza del segmento orientato;
- la <u>direzione</u> è la retta che contiene che il segmento;
- il <u>verso</u> è un verso di percorrenza della retta e quindi del segmento.

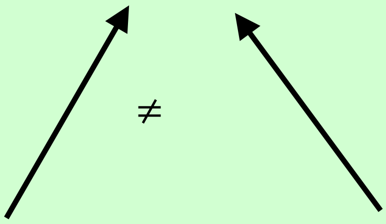
Due vettori sono diversi se differiscono almeno una delle tre proprietà espresse sopra.



Vettori con la stessa direzione e verso ma diversi in modulo



Vettori con la stessa direzione e lo stesso modulo ma verso opposto



Vettori con lo stesso modulo ma direzione e verso diversi

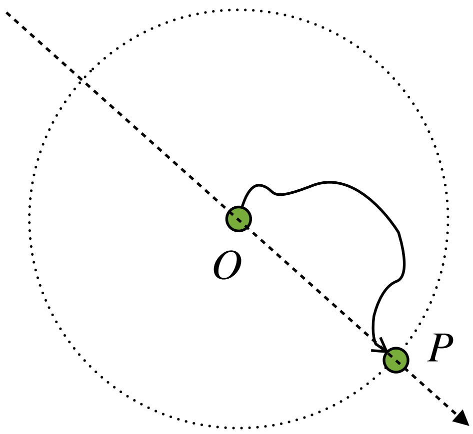
I vettori sono strumenti matematici essenziali per la descrizione completa dei fenomeni fisici.

<u>Nota 1</u>: i vettori che vengono utilizzati per descrivere delle grandezze fisiche hanno il modulo che si esprime con un numero (reale) e un'unità di misura (della grandezza in questione).

<u>Nota 2</u>: nella definizione di vettore non ci si è mai riferiti alla posizione, nello spazio, in cui il vettore è collocato. Infatti un vettore è univocamente definito dalle tre proprietà enunciate. Due vettori collocati in due punti distinti dello spazio ma con gli stessi modulo, direzioni e verso sono da ritenersi lo stesso vettore! Come conseguenza di ciò è ammesso traslare un

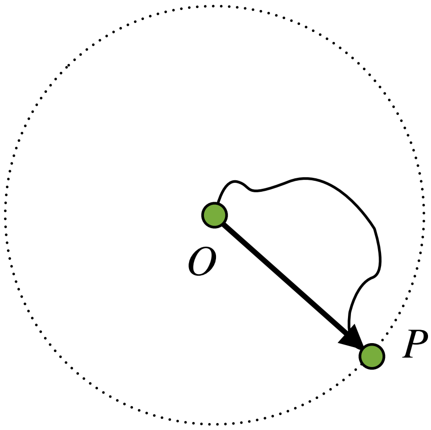
vettore e posizionarlo liberamente nello spazio senza modificare le sue proprietà fondamentali.

Il prototipo del vettore è il vettore spostamento. Si immagini di lasciare una piuma in un certo punto O e di voler esprimere la sua posizione P dopo 10 secondi. La piuma in questo intervallo di tempo seguirà una certa traiettoria.

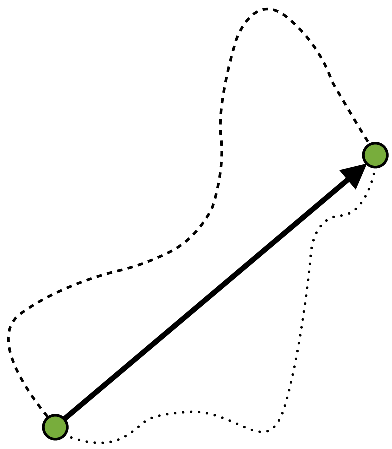


È evidente che non è possibile rispondere univocamente al problema semplicemente con un numero ma è pure necessario specificare una direzione ed un verso.

Ad esempio con il numero saremo in grado di specificare il raggio della circonferenze con centro in O ma non definire in quale punto della circonferenza si trovi la piuma. Per specificare un punto sulla circonferenza è necessario (ad esempio) intersecarla con una retta passante per O e per il punto P. Ma questa retta interseca la circonferenza in due punti quindi, per finire, è necessario definire con un verso (in questo caso quello da O a P) quale dei due punti intersezione rappresenti la posizione della piuma. In sostanza, quindi, per definire la posizione della piuma sono serviti 3 ingredienti: un numero (modulo) una direzione (la retta) un verso sulla retta.



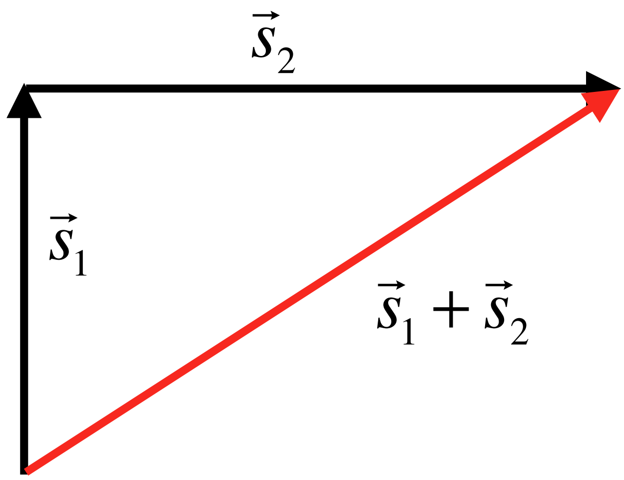
Ma questi sono proprio le tre proprietà caratteristiche di un vettore. Perciò per definire univocamente la posizione della piuma serve un vettore! Il segmento orientato che definisce lo spostamento (OP con orientamento da O a P) prende il nome di vettore spostamento.



Si noti che il vettore spostamento non conserva informazioni sulla traiettoria seguita dalla piuma. Quindi le traiettorie con lo stesso punto iniziale e finale non sono discriminate dal vettore spostamento. Non solo: lo spazio percorso dalla piuma e il modulo (la lunghezza) del vettore spostamento sono quantità in generale differenti.

Per indicare un vettore useremo un simbolo alfanumerico una freccia sopra: $\vec{v}$, $\vec{A}$, $\vec{a}_1$, $\overrightarrow{AB}$ possono essere usati per indicare un vettore. In particolare $\overrightarrow{AB}$ in genere si usa per indicare il segmento orientato AB con orientamento da A a B. In questo caso, inoltre, il punto A si chiama <u>coda</u> o <u>origine</u> del vettore $\overrightarrow{AB}$ ed il punto B si chiama <u>punta</u> del vettore $\overrightarrow{AB}$. Il modulo di un vettore $\vec{v}$ si indica come $\|\vec{v}\|$. In queste dispense inoltre, dove non ci sarà la possibilità di equivocare, per compattezza di notazione il modulo di un vettore $\vec{v}$ potrà essere semplicemente indicato con il simbolo senza la freccia ovvero v.

<u>Esempio</u>: Un aereo si sposta di 3000 km verso Nord e successivamente di 4000 km verso verso Est. Qual è il modulo dello spostamento totale dell'aereo?



Per il teorema di Pitagora: $\|\vec{s}_1 + \vec{s}_2\| = \sqrt{\|\vec{s}_1\|^2 + \|\vec{s}_2\|^2} = 5000\ km$.

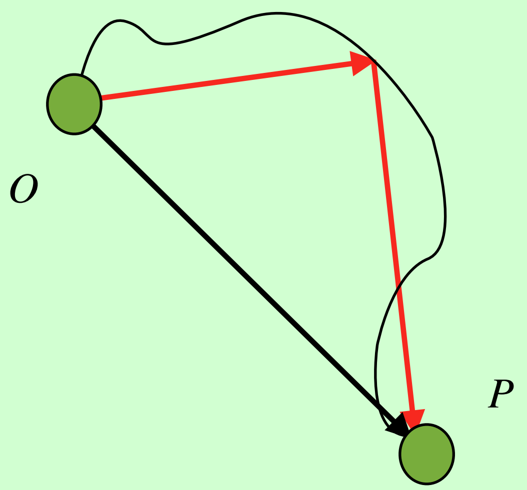
Operazioni fra vettori

È possibile definire operazioni fra vettori analoghe a quelle fra numeri.

Somma di vettori

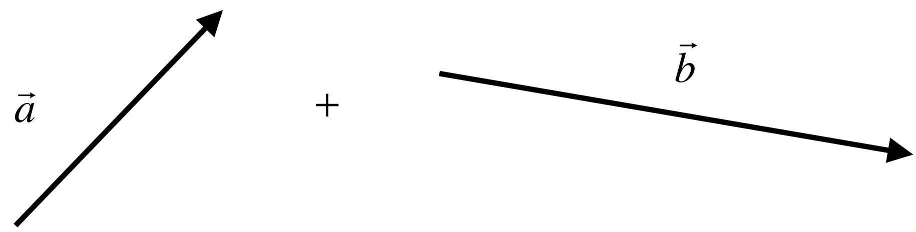
Si può definire la somma di vettori. Il risultato della somma di due vettori (detti vettori componenti) è ancora un vettore che si chiama vettore risultante.

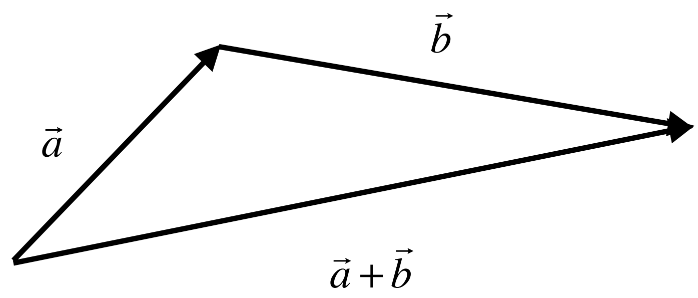
Due vettori si sommano come due vettori spostamento. Torniamo all'esempio della piuma. Lo spostamento della piuma dopo 10 secondi si può pensare come l'effetto derivante da due spostamenti parziali (ad esempio di 5 secondi l'uno). Diremo allora che il vettore spostamento risultante è uguale alla somme dei due vettori che descrivono gli spostamenti parziali.



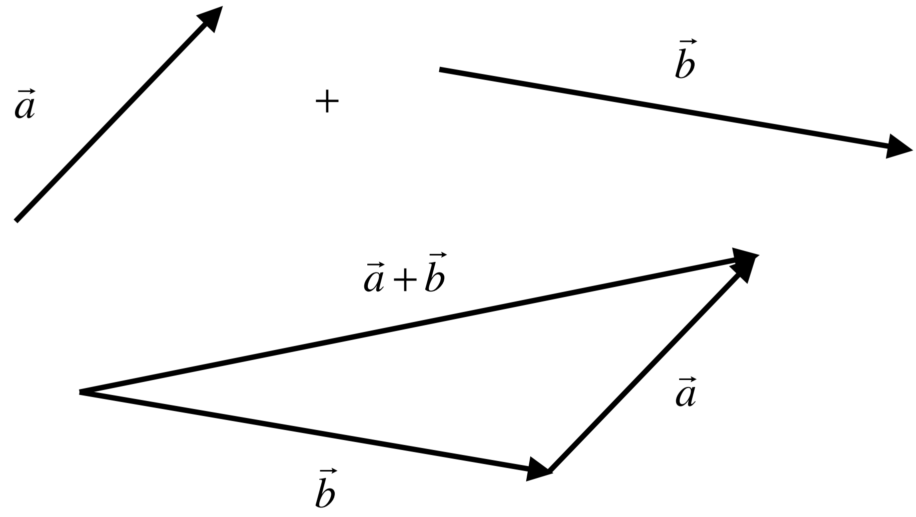
Generalizzando a due vettori qualunque $\vec{a}$ e $\vec{b}$ allora, per ottenere geometricamente la somma $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$ dovremo:

1) traslare rigidamente (ovvero senza modificarne direzione e verso) uno dei due vettori e disporre la coda di uno in corrispondenza della punta dell'altro; ad esempio disponiamo la coda di $\vec{b}$ in corrispondenza della punta di $\vec{a}$
2) disegnare il vettore somma che nel caso in questione sarà il vettore che ha coda in corrispondenza della coda di $\vec{a}$ e la punta in corrispondenza della punta di $\vec{b}$.





È facile verificare graficamente che, diversamente, disponendo la coda di $\vec{a}$ in corrispondenza della punta di $\vec{b}$, otteniamo lo stesso risultato.

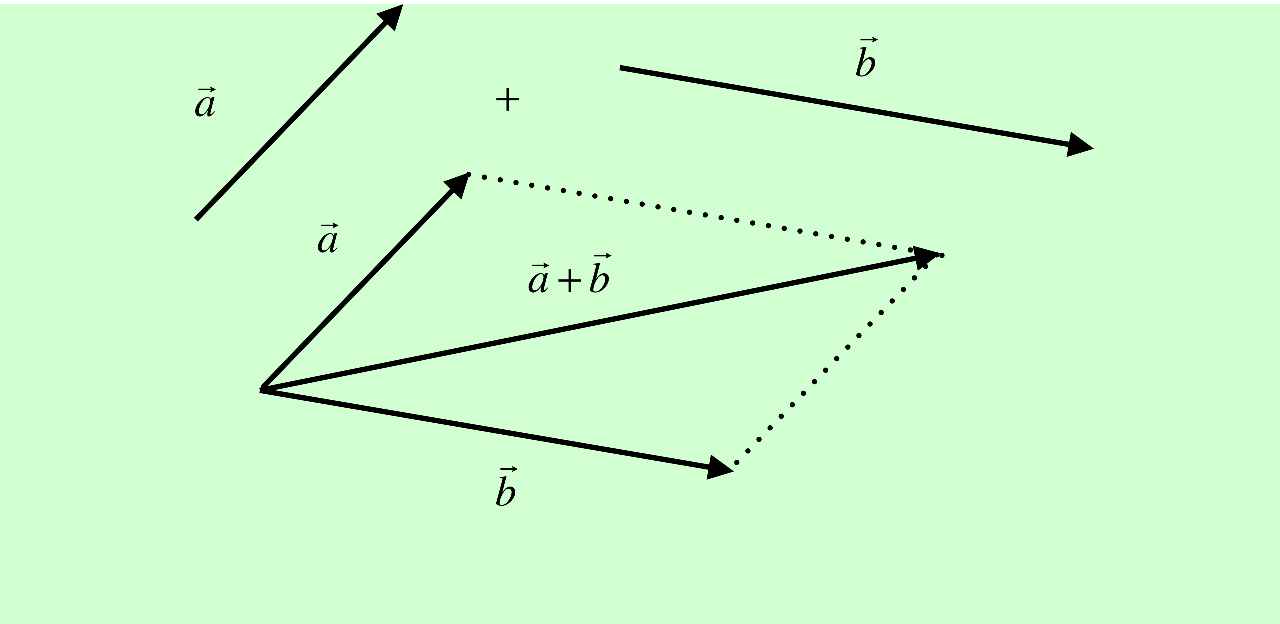


Quindi la somma di due vettori non dipende dall'ordine con cui compaiono nella somma quindi è un'operazione commutativa ovvero $\vec{s}=\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.

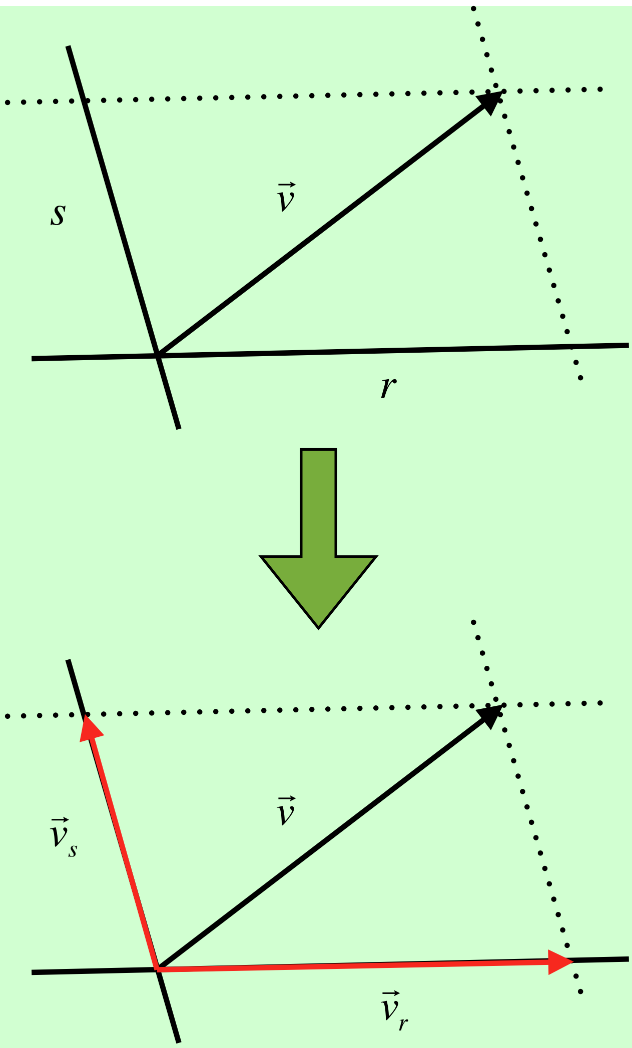
Si dice anche che due vettori si sommano secondo la regola del parallelogramma.

La regola del parallelogramma è una costruzione geometrica per calcolare la somma di due vettori:

1) si dispongano i due vettori in modo che le loro code coincidano;
2) si disegni il parallelogramma che ha come lati i due vettori;
3) si disegni la diagonale del parallelogramma che contiene le code dei due vettori;
4) il vettore somma è il segmento orientato che coincide con tale diagonale in modulo e direzione ed ha verso che va dalle code dei vettori al vertice opposto.



Si noti che la somma di due vettori con la stessa direzione è un vettore che ha come direzione la stessa direzione dei vettori componenti, modulo uguale alla somma dei moduli e stesso verso (se i vettori componenti hanno lo stesso verso) o modulo uguale al valore assoluto della differenza fra i moduli e verso del vettore con modulo maggiore (se i vettori componenti hanno verso opposto).



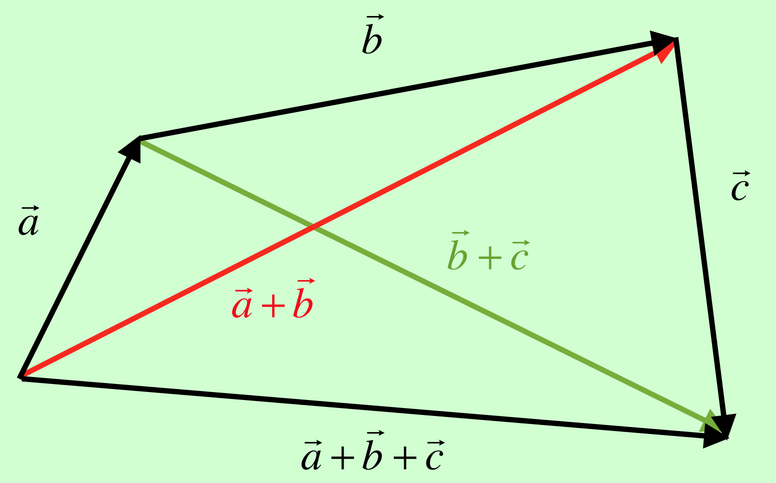
Utilizzando la regola del parallelogramma è possibile scomporre un qualsiasi vettore nella somma di due vettori componenti con due direzioni fissate. Si considerino il vettore $\vec{v}$ e due rette r ed s non parallele; allora è possibile costruire il parallelogramma che ha come diagonale il vettore $\vec{v}$ ed ha i lati paralleli a due a due alle due rette scelte. A questo punto è facile determinare geometricamente ed in modo <u>univoco</u>, usando la costruzione descritta nella figura, i due vettori componenti $\vec{v}_r$ e $\vec{v}_s$, con direzione rispettivamente r ed s, tali che $\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_s$.

La somma di vettori gode pure della proprietà associativa ossia

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$$

dove con l'ultima uguaglianza si intende che le parentesi sono superflue poiché è indifferente il modo con mettiamo le parentesi e quindi la priorità che scegliamo per determinare la risultante totale (ovvero sommare $\vec{a}$ con $\vec{b}$ ed al risultato sommare $\vec{c}$ dà lo stesso risultato che si ottiene sommando ad $\vec{a}$ la risultante della somma fra $\vec{b}$ e $\vec{c}$).

Graficamente è facile verificare l'associatività della somma fra vettori.



Prodotto

È possibile definire tre tipi di prodotti che coinvolgono quantità vettoriali: il prodotto per uno scalare, il prodotto scalare, ed il prodotto vettoriale. Vediamoli in dettaglio

---

Prodotto per uno scalare

Il prodotto per uno scalare è un'operazione che coinvolge un numero reale α ed un vettore $\vec{v}$. Il risultato di questa operazione è un vettore che indicheremo come $\alpha\vec{v}$. Il vettore che risulta da questa operazione ha le seguenti caratteristiche:

1) modulo uguale a $|\alpha|\|\vec{v}\|$,

2) stessa direzione di $\vec{v}$,

3) stesso verso di $\vec{v}$ se $\alpha > 0$, verso opposto se $\alpha < 0$.

In particolare se $\alpha = 1$ allora banalmente $\alpha\vec{v} = \vec{v}$; se $\alpha = -1$ allora potremo scrivere $-1\vec{v} = -\vec{v}$ dove il vettore $-\vec{v}$ è il vettore opposto a $\vec{v}$ (ovvero il vettore che ha lo stesso modulo e la stessa direzione di $\vec{v}$ ma verso opposto).

A questo punto è indispensabile introdurre un vettore particolare detto vettore nullo. Tale vettore compare come risultato della somma un vettore con il suo vettore opposto o quando si sceglie $\alpha = 0$ nel prodotto di un vettore qualsiasi per uno scalare. Il vettore nullo è particolare perché ha modulo zero quindi è un vettore in cui la coda e la punta coincidono! Esso non ha né una direzione né un verso (perché sono infinite le rette che passano per un punto). Esso è l'elemento neutro della somma vettoriale: il risultato della somma fra qualsiasi vettore e il vettore nullo è il vettore di partenza.

Il prodotto per uno scalare è

1) distributivo rispetto alla somma di due scalari: $(\alpha+\beta)\vec{v}=\alpha\,\vec{v}+\beta\,\vec{v}$,

2) distributivo rispetto alla somma di due vettori: $\alpha(\vec{v}+\vec{w})=\alpha\,\vec{v}+\alpha\,\vec{w}$.

Nota: *se α è un numero naturale allora $\alpha\vec{v}$ è uguale alla somma di $\vec{v}$ con sé stesso α volte.*

Prodotto scalare

Il prodotto scalare fra due vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$ si indica con un punto "·" ed è un'operazione che coinvolge due vettori e che produce un numero reale secondo la regola

$$\vec{v}\cdot\vec{w}=\|\vec{v}\|\,\|\vec{w}\|\cos\theta_{vw}$$

dove θ_{vw} è l'angolo compreso fra i due vettori quando tali vettori vengono disposti in modo che le loro code coincidano con $\theta_{vw}\le 180^{\circ}$.

Il prodotto scalare gode delle seguenti proprietà:

1) commutativa: $\vec{v}\cdot\vec{w}=\vec{w}\cdot\vec{v}$,

2) distributiva rispetto alla somme vettoriale: $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$,

3) ed inoltre vale che $\alpha(\vec{v}\cdot\vec{w})=(\alpha\,\vec{v})\cdot\vec{w}=\vec{v}\cdot(\alpha\,\vec{w})$.

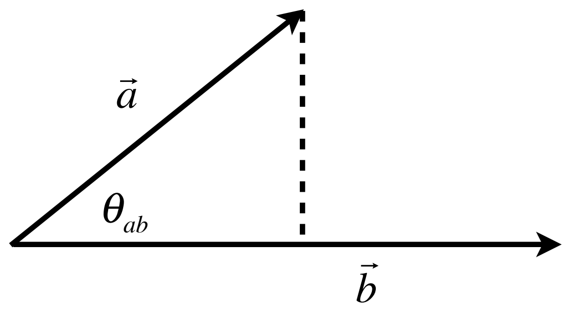
Dalla definizione di prodotto scalare segue che il prodotto scalare di un vettore per sé stesso è uguale al modulo quadro del vettore:

$$\vec{v}\cdot\vec{v}=\|\vec{v}\|^2.$$

In generale il prodotto scalare di due vettori è un numero reale positivo, negativo o nullo.

È nullo se uno dei due vettori nel prodotto è il vettore nullo o se $\theta_{vw} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ (nel qual caso il coseno è nullo). In sostanza il prodotto scalare fra due vettori è nullo se essi sono <u>ortogonali</u>.

Geometricamente il prodotto scalare è facilmente visualizzabile.



Si consideri ad esempio il prodotto scalare $\vec{a} \cdot \vec{b}$: se $\theta_{ab} \leq 90^\circ$ allora $\|\vec{a}\| \cos\theta_{ab}$ è la misura della proiezione del vettore $\vec{a}$ nella direzione di $\vec{b}$. Essendo $\|\vec{b}\|$ la misura del vettore $\vec{b}$ allora, dalla definizione di prodotto scalare, segue che $\vec{a} \cdot \vec{b}$ è il prodotto della misura della proiezione di $\vec{a}$ per la lunghezza di $\vec{b}$. Essendo il prodotto scalare commutativo si potrà pure interpretare $\vec{a} \cdot \vec{b}$ come il prodotto della misura della proiezione di $\vec{b}$ per la lunghezza di $\vec{a}$.

Se $90^\circ < \theta_{ab} \leq 180^\circ$ l'interpretazione è la stessa a meno di un segno ovvero il prodotto scalare si interpreterà come l'opposto del prodotto della misura della proiezione di $\vec{a}$ per la lunghezza di $\vec{b}$.

<u>Prodotto vettoriale</u>

Il prodotto vettoriale fra due vettori si indica con il simbolo "$\wedge$" ed è un'operazione che ha come risultato un vettore. Il vettore risultante $\vec{v} \wedge \vec{w}$ ha le seguenti caratteristiche:

1) ha modulo uguale a $\|\vec{v} \wedge \vec{w}\| = \|\vec{v}\| \|\vec{w}\| \sin\theta_{vw}$,
2) ha direzione ortogonale al piano che contiene entrambi i vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$
3) ha verso definito dalla regola della mano destra.

Il prodotto vettoriale gode delle seguenti proprietà:

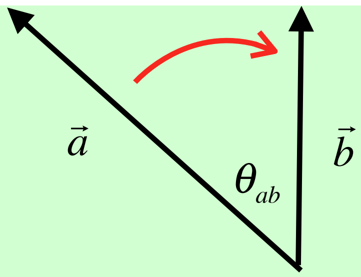
1) è anti-commutativo: $\vec{v} \wedge \vec{w} = -\vec{w} \wedge \vec{v}$,
2) è distributivo rispetto alla somma vettoriale $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \wedge \vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{c} + \vec{b} \wedge \vec{c}$,
3) ed inoltre vale che $\left(\alpha\, \vec{v}\right) \wedge \vec{w} = \vec{v} \wedge \left(\alpha\, \vec{w}\right) = \alpha\left(\vec{v} \wedge \vec{w}\right)$.

Dalla definizione segue che il prodotto vettoriale produce il vettore nullo se uno dei due vettori coinvolti nel prodotto è uguale al vettore nullo, se $\theta_{vw} = k\pi$ ovvero se i due vettori coinvolti hanno la stessa direzione.

La regola della mano destra

Per determinare il verso del vettore risultante da un'operazione di prodotto vettoriale procedere nel seguente modo:

1) individuare il piano contenente i due vettori e l'angolo, minore di 180°, fra i due vettori;
2) ruotare il primo vettore che compare nel prodotto sul secondo vettore in modo da "spazzare" tale angolo;
3) curvare le dita della mano destra in modo da "mimare" tale rotazione (con la punta delle dita che indica il verso di rotazione);
4) la punta del pollice della mano (disposto in modo ortogonale rispetto alle dita) indicherà il verso del vettore risultante.



Esempio: si calcoli $\vec{a} \wedge \vec{b}$ dove $\vec{a}$ e $\vec{b}$ sono indicati in figura. I due vettori giacciono sul piano del foglio quindi il risultato del loro prodotto vettoriale sarà un vettore con direzione ortogonale al foglio. La regola della mano destra deve permettere di determinare il verso del risultato (verso il lettore e quindi uscente dal foglio o entrante nel foglio). L'angolo minore di 180° fra i vettori è θ_{ab} ed il vettore $\vec{a}$ si sovrappone a $\vec{b}$ descrivendo tale angolo seguendo la rotazione descritta in figura. Per disporre le dita ricurve della mano destra in modo da mimare tale rotazione osserviamo che è necessario puntare il pollice verso il basso, in verso entrante nel foglio. Il verso entrante è quindi quello del vettore risultante.

Versori

Il versore è un vettore con modulo uguale ad 1. In genere il versore si indica con un simbolo diverso dal vettore generico: invece della "freccia" si una un "cappello". Ad esempio $\hat{i}$, $\hat{V}$, $\hat{a}$ sono versori.

Dunque un versore indica semplicemente una direzione ed un verso. Quindi ad ogni retta orientata è possibile associare univocamente un versore con la stessa direzione e lo stesso verso!

Dalla definizione segue che il prodotto scalare di un versore per sé stesso è $\hat{v} \cdot \hat{v} = 1$.

Dato un qualsiasi vettore non nullo $\vec{v}$ allora il versore con le sue stesse direzione e verso lo otteniamo moltiplicando $\vec{v}$ per l'inverso del suo modulo ovvero: $\hat{v} = \frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}$. Analogamente qualsiasi vettore $\vec{w}$ si può scrivere come un versore $\hat{w}$, che abbia la stessa direzione e lo stesso verso, per il suo modulo $\|\vec{w}\|$: $\vec{w} = \|\vec{w}\|\,\hat{w}$.

Il prodotto scalare fra due versori è un numero compreso tra -1 ed 1 infatti $\hat{a}\cdot\hat{b} = \cos\theta_{ab}$ ed il coseno di un angolo è compreso fra -1 ed 1.

<u>Nota:</u> ovviamente dato un qualsiasi vettore $\vec{v}$ ed un qualsiasi versore $\hat{i}$ non sempre possibile verificare la relazione $\vec{v} = v\,\hat{i}$.

<u>Rappresentazione di un vettore per componenti</u>

Si consideri ora un vettore $\vec{v}$ su un piano e si considerino due rette <u>ortogonali</u> orientate x ed y su questo piano (indichiamo tramite la coppia di versori ortogonali $\hat{i}$ e $\hat{j}$ la direzione delle due rette e fissiamo su di esse un verso di percorrenza). Per quanto abbiamo già detto è possibile scomporre il vettore $\vec{v}$ nella somma dei due vettori componenti con la stessa direzione rispettivamente di x ed y ovvero $\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y$. I due vettori componenti sono paralleli ai versori $\hat{i}$ ed $\hat{j}$ quindi potremo scriverli come $\vec{v}_x = v_x\hat{i}$ e $\vec{v}_y = v_y\hat{j}$. Quindi il vettore $\vec{v}$ potrà essere scritto come

$$\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j}\,.$$

Diremo che la coppia <u>ordinata</u> di numeri reali (v_x, v_y) è la coppia delle componenti di $\vec{v}$ rispetto alla coppia dei versori ortogonali $\hat{i}$ ed $\hat{j}$. Ogni vettore che appartiene al piano su cui giacciono le due rette x ed y potrà essere riscritto in questa forma rispetto ai due versori dati. Le coppia di versori prende il nome di base ortogonale di versori. I due numeri reali v_x e v_y si chiamano componenti del vettore $\vec{v}$ rispetto alla base di versori $\hat{i}$, $\hat{j}$.

Mediante il prodotto scalare fra $\vec{v}$ ed i due versori di base si ottiene:

$$\begin{cases} \vec{v}\cdot\hat{i} = v_x\left(\hat{i}\cdot\hat{i}\right)+v_y\left(\hat{j}\cdot\hat{i}\right) \Rightarrow \|\vec{v}\|\cos\theta_{vx} = v_x \\ \vec{v}\cdot\hat{j} = v_x\left(\hat{i}\cdot\hat{j}\right)+v_y\left(\hat{j}\cdot\hat{j}\right) \Rightarrow \|\vec{v}\|\cos\theta_{vy} = v_y \end{cases}$$

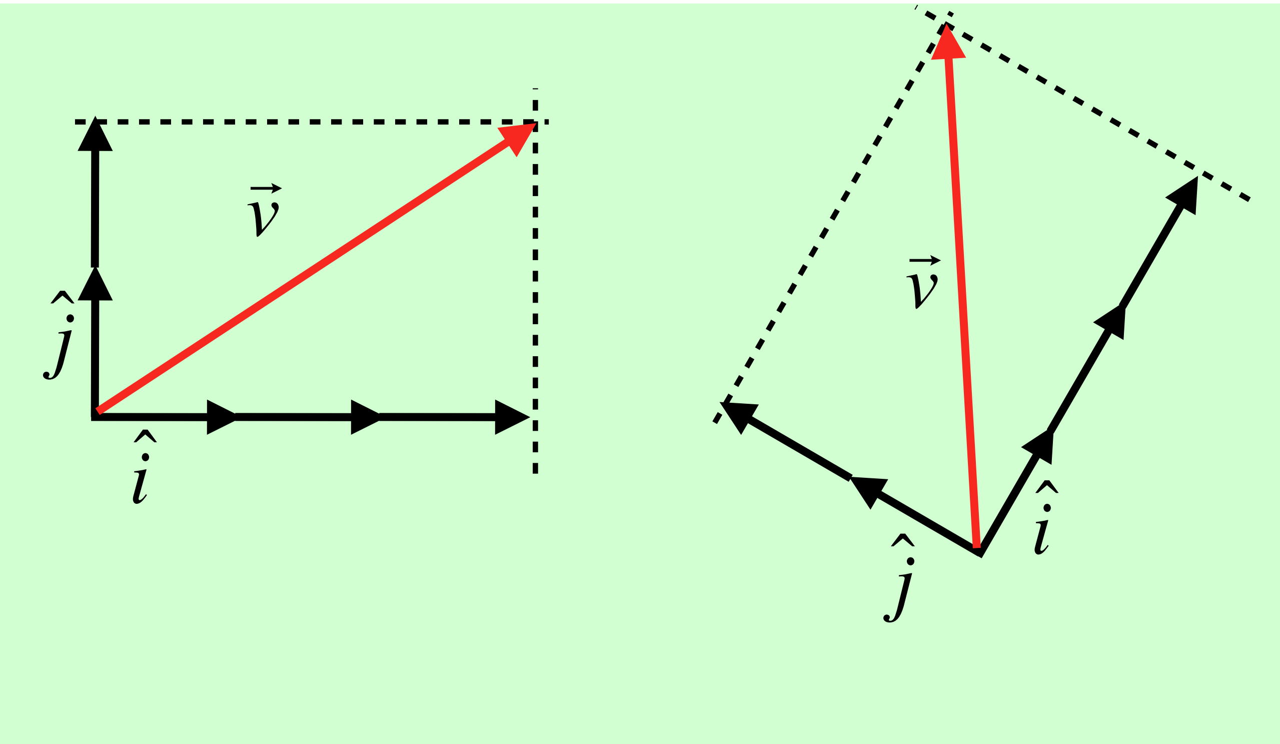
dove abbiamo sfruttato il fatto che i versori sono ortogonali fra di loro e quindi $\hat{i}\cdot\hat{j}=0$. Quindi, per le basi ortogonali, le due componenti di $\vec{v}$ sono uguali al modulo del vettore $\vec{v}$ per i coseni degli angoli fra il vettore ed i versori di base. Tali componenti possono essere positive, negative o nulle a seconda del valore del coseno. I coseni che compaiono nell'espressione sopra si chiamano coseni direttori.

In questo modo, fissata una base di versori, ad ogni vettore del piano è possibile associare una coppia ordinata di numeri (le sue componenti rispetto alla base scelta) che lo identificano univocamente! È quindi possibile rappresentare algebricamente tutti i vettori su un piano mediante una coppia ordinata di numeri reali (v_x, v_y), che li identifica univocamente una volta che è fissata la coppia di versori di base. Questo tipo di rappresentazione dei vettori si chiama rappresentazione cartesiana. Formalmente, quindi, mediante la costruzione descritta sopra è possibile rappresentare i vettori con coppie ordinate di numeri (come i punti di un piano cartesiano, appunto) ed eseguire le operazioni precedentemente definite in questo formalismo.

Un altro modo di definire la rappresentazione cartesiana dei vettori si un piano è mediante la seguente costruzione (v_x, v_y) geometrica. Si consideri sul piano un sistema di riferimento cartesiano (ovvero si fissino due rette orientate ortogonali x ed y). Queste rette si intersecano in un punto O che è l'origine del sistema di riferimento. Un qualsiasi vettore $\vec{v}$ sul piano può essere traslato parallelamente a sé stesso e disposto con la coda coincidente con l'origine O . La punta P del vettore sarà ora in corrispondenza di qualche punto del piano di coordinate (x_P, y_P) . Queste due coordinate sono proprio (v_x, v_y) ovvero le componenti del vettore. Quindi: una volta fissato un sistema di riferimento cartesiano sul piano è possibile associare ad ogni vettore un punto sul piano.

Nota: si tenga presente che nella rappresentazione cartesiana è assolutamente necessario specificare anzitutto i versori di base mediante i quali associare a ciascuna coppia ordinata di numeri un vettore sul piano.

Esempio: la coppia ordinata $(3,2)$ definisce il vettore $\vec{v} = 3\hat{i} + 2\hat{j}$. Ma tale vettore dipende da come sono fissati $(\hat{i}, \hat{j})$: in figura è evidente che fissando diversamente la coppia di versori si associa la coppia ordinata $(3,2)$ a due vettori diversi.



Definita la rappresentazione cartesiana è ora possibile fare le operazioni fra vettori operando su coppie ordinate di numeri.

Somma

$$(v_x, v_y) + (w_x, w_y) = (v_x + w_y, v_y + w_y)$$

Prodotto per uno scalare

$$\alpha(v_x, v_y) = (\alpha v_x, \alpha v_y)$$

Prodotto scalare

$$(v_x, v_y) \cdot (w_x, w_y) = v_x w_x + v_y w_y$$

Il prodotto vettoriale non è definibile se ci si limita a considerare l'insieme di tutti i vettori che giacciono su un piano (infatti sappiamo bene che il prodotto vettoriale di due vettori di un piano ha, come risultato, un vettore ortogonale al piano stesso). È necessario generalizzare il concetto di rappresentazione cartesiana allo spazio tridimensionale. Nello spazio tridimensionale ciascun vettore si può scrivere come:

$$\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k}$$

dove $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ è una terna di versori ortogonali due a due (che identificano 3 direzioni orientate ortogonali). In rappresentazione cartesiana un vettore si può rappresentare mediante una terna ordinata di numeri (v_x, v_y, v_z). Questi tre numeri sono le coordinate cartesiane del punto P in corrispondenza alla punta del vettore (quando la coda del vettore coincide con l'origine del sistema di riferimento) ovvero sono uguali al modulo di $\vec{v}$ per i tre coseni direttori rispetto ai versori $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$.

Dato un generico vettore $\vec{v}$ e due direzioni non parallele ma non ortogonali r e s è comunque possibile definire due versori con la stessa di direzione delle due rette date e verso arbitrario, $\hat{r}$ ed $\hat{s}$, e scrivere $\vec{v}$ per componenti rispetto ad $\hat{r}$ ed $\hat{s}$ come:

$$\vec{v} = v_r\hat{r} + v_s\hat{s} \ .$$

Diremo allora che la coppia di versori $\hat{r}$, $\hat{s}$ forma una base (non ortogonale). Le componenti rispetto a questa base sono v_r e v_s e non si possono calcolare tramite i coseni direttori definiti per una base ortogonale perché adesso $\hat{r}\cdot\hat{s} \neq 0$. Per calcolare tali componenti il conto è leggermente più complicato:

$$\begin{cases} \hat{r}\cdot\vec{v} = v_r\left(\hat{r}\cdot\hat{r}\right) + v_s(\hat{r}\cdot\hat{s}) = v_r + v_s\cos\theta_{rs} \\ \hat{s}\cdot\vec{v} = v_r\left(\hat{s}\cdot\hat{r}\right) + v_s(\hat{s}\cdot\hat{s}) = v_r\cos\theta_{rs} + v_s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \|\vec{v}\|\cos\theta_{rv} = v_r + v_s\cos\theta_{rs} \\ \|\vec{v}\|\cos\theta_{sv} = v_r\cos\theta_{rs} + v_s \end{cases}$$

dove l'angolo θ_{rs} è quello formato dai versori ed è noto.

Risolvendo il sistema si ottiene

$$\begin{cases} v_r = \|\vec{v}\| \dfrac{\cos\theta_{rv} - \cos\theta_{rs}\cos\theta_{sv}}{\sin^2\theta_{rs}} \\ v_s = \|\vec{v}\| \dfrac{\cos\theta_{sv} - \cos\theta_{rs}\cos\theta_{rv}}{\sin^2\theta_{rs}} \end{cases}.$$

La stessa decomposizione in componenti vista sul piano può essere fatta per un qualsiasi vettore nello spazio utilizzando tre rette orientate a due a due ortogonali x , y , z ed versori di base ad esse associati $\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$. Generalizzando quanto appena visto per il piano potremo scrivere:

$$\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k} = \|\vec{v}\|\cos\theta_{vx}\hat{i} + \|\vec{v}\|\cos\theta_{vy}\hat{j} + \|\vec{v}\|\cos\theta_{vz}\hat{k}.$$

Basi destrorse e sinistrorse

Si consideri una terna ordinata di versori ortogonali $\left(\hat{i},\hat{j},\hat{k}\right)$ a due a due ovvero tali che $\hat{i}\cdot\hat{j}=0$, $\hat{j}\cdot\hat{k}=0$, $\hat{k}\cdot\hat{i}=0$.

Esistono due possibilità:

1) i tre versori sono tali che $\hat{i}\wedge\hat{j}=\hat{k}$ ed in questo caso la terna si dice destrorsa;
2) i tre versori sono tali che $\hat{i}\wedge\hat{j}=-\hat{k}$ ed in questo caso la terna si dice sinistrorsa.

Nel primo caso inoltre vale che $\hat{i}\wedge\hat{j}=\hat{k} \Rightarrow \hat{j}\wedge\hat{k}=\hat{i} \Rightarrow \hat{k}\wedge\hat{i}=\hat{j}$, nel secondo caso invece vale che $\hat{i}\wedge\hat{j}=-\hat{k} \Rightarrow \hat{j}\wedge\hat{k}=-\hat{i} \Rightarrow \hat{k}\wedge\hat{i}=-\hat{j}$.

È completamente arbitraria la scelta di una base destrorsa piuttosto che quella di una base sinistrorsa. Tuttavia in queste dispense sceglieremo sempre basi destrorse.

Terminiamo la discussione sul prodotto vettoriale. Dati due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ le cui componenti cartesiane (rispetto ad una base destrorsa) sono rispettivamente (a_x, a_y, a_z) e (b_x, b_y, b_z) , allora il vettore $\vec{c}$ risultate dall'operazione di prodotto vettoriale ($\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b}$) avrà componenti (c_x, c_y, c_z) che formalmente si possono ottenere calcolando il determinante della matrice:

$$\begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{pmatrix}.$$

Esse sono le coordinate corrispondenti ai tre versori $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ del risultato di questo determinante:

$$\mathrm{Det}\begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{pmatrix} = \left(a_y b_z - a_z b_y\right)\hat{i} + \left(a_z b_x - a_x b_z\right)\hat{j} + \left(a_x b_y - a_y b_x\right)\hat{k}$$

ovvero:

$$\begin{cases} c_x = \left(a_y b_z - a_z b_y\right) \\ c_y = \left(a_z b_x - a_x b_z\right) \\ c_z = \left(a_x b_y - a_y b_x\right) \end{cases}$$

Calcolo di un determinate (Sviluppo di Laplace)

Il determinante di una matrice 2x2 è semplicemente definito come il prodotto degli elementi sulla diagonale principale meno il prodotto degli elementi sulla diagonale secondaria ovvero

$$\mathrm{Det}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} = a_1 a_4 - a_2 a_3 .$$

Si consideri invece una generica matrice NxN. In questo caso il determinate non è calcolabile direttamente ma si può ridurre al calcolo di una serie di determinanti di matrici (N-1)x(N-1). Questa procedura può infine essere iterata fino ad ottenere il risultato voluto mediante il calcolo esplicito di determinanti di matrici 2x2. La formula che permette di scrivere il determinante di una matrice M , NxN, in termini dei determinanti di N matrici (N-1)x(N-1) si chiama sviluppo di Laplace ed ha la seguente forma:

$$\mathrm{Det}\, M = \sum_{j=1}^{N} (-1)^{(i+j)} \mathrm{Det}\, M_{ij} \cdot m_{ij} = \sum_{i=1}^{N} (-1)^{(i+j)} \mathrm{Det}\, M_{ij} \cdot m_{ij} .$$

In questa formula i è l'indice di riga della matrice e j è l'indice di colonna (quindi la coppia i, j indicherà l'elemento di matrice che si trova nella i-esima riga e nella j-esima colonna). Con M_{ij} indichiamo il minore della matrice M corrispondente all'elemento di matrice m_{ij} ; M_{ij} è una matrice quadrata (N-1)x(N-1) che si determina partendo da M eliminando la riga i-esima e la colonna j-esima.

La sommatoria nella formula di Laplace indica che possiamo scegliere una qualsiasi riga o colonna della matrice M e, per ciascun elemento di quella riga o colonna dobbiamo calcolare il prodotto

$$(-1)^{i+j}\,\mathrm{Det}\,M_{ij}\cdot m_{ij}$$

ed infine sommare tutti i contributi.

Esempio:

Si consideri la matrice 3x3:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Scegliamo ad esempio la seconda riga i cui elementi avranno posizione $(2,1)$, $(2,2)$, $(2,3)$. Avremo:

$$\mathrm{Det}\,M=(-1)^{2+1}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}\cdot 3+(-1)^{2+2}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\cdot 0+(-1)^{2+3}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\cdot(-1)$$

che darà:

$$\mathrm{Det}\,M=(-1)\cdot 0\cdot 3+0+(-1)\cdot 8\cdot(-1)=8\,.$$

Esercizi

1) Determinare la somma di due vettori di modulo rispettivamente $\|\vec{v}_1\| = 2$ e $\|\vec{v}_2\| = 5$ essendo $\theta_{12} = 30^\circ$ l'angolo fra essi compreso.

2) Se $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ sono due vettori di modulo rispettivamente $\|\vec{v}_1\| = 4$ e $\|\vec{v}_2\| = 2$ calcolare il vettore $\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ essendo $\theta_{12} = 60^\circ$ l'angolo fra di essi compreso.

3) Determinare l'opposto del vettore $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$ sapendo che $\|\vec{v}_1\| = 1, \|\vec{v}_2\| = 3$ e $\theta_{12} = 60^\circ$.

4) Calcolare l'angolo fra due vettori di uguale modulo sapendo che il modulo del vettore somma è $3/2$ del modulo dei due vettori componenti.

5) Si considerino due versori $\hat{a}$ e $\hat{b}$ che formano un angolo $\theta_{ab} = 45^\circ$. Dati i due vettori $\vec{v}_1 = 3\hat{a}$ e $\vec{v}_2 = \hat{a} - \hat{b}$ calcolarne la somma ed esprimerla per componenti rispetto alla base $(\hat{a}, \hat{b})$, e successivamente determinarne il modulo e l'angolo che forma con i vettori $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$.