

Esercizi di Calcolo Vettoriale

Esercitazioni di Fisica LA per ingegneri - A.A. 2011-2012

indirizzo e-mail: alessandro.tronconi@bo.infn.it

indirizzo internet per la didattica: <https://ishtar.df.unibo.it/>

Esercizio 1

La proiezioni dei vettori \vec{v}_1 e \vec{v}_2 lungo la direzione del vettore \vec{v}_3 misurano rispettivamente $2m$ e $3m$ e il prodotto scalare della somma di $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$ con \vec{v}_3 vale $30m^2$. Calcolare $|\vec{v}_3|$.

(Ris: $|\vec{v}_3| = 6m$ se $-\pi/2 < \theta_{13} < \pi/2$ e $-\pi/2 < \theta_{23} < \pi/2$ oppure $|\vec{v}_3| = 30m$ se $\pi/2 < \theta_{13} < 3\pi/2$ e $-\pi/2 < \theta_{23} < \pi/2$)

Esercizio 2

Verificare che i vettori $\vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{k}$ e $\vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\hat{i} + \frac{1}{\sqrt{6}}\hat{j} - \frac{2}{\sqrt{6}}\hat{k}$ sono ortogonali e sono versori; trovarne un terzo, \vec{v}_3 , che sia versore perpendicolare ad entrambi. Infine, dato il vettore \vec{w}_{12} di modulo 2, giacente sul piano cui appartengono pure \vec{v}_1 e \vec{v}_2 , e formante angoli rispettivamente di $\pi/3$ e $\pi/6$ con \vec{v}_1 e \vec{v}_2 , esprimerlo nella forma $\vec{w}_{12} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2$ e in rappresentazione cartesiana.

(Ris: $\vec{v}_3 = \mp \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{i} \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{j}$; $a_1 = 1$, $a_2 = \sqrt{3}$)

Esercizio 3

Dati i vettori $\vec{v}_1 = 3\hat{i} + 2\hat{j}$, $\vec{v}_2 = -5\hat{k}$, $\vec{v}_3 = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$, calcolare $p = (2\vec{v}_1) \wedge (\frac{1}{5}\vec{v}_2) \cdot \vec{v}_1 - (\vec{v}_1 + \vec{v}_3) \cdot \vec{v}_2$. Calcolare inoltre i tre angoli fra di essi compresi (espressi in radianti).

(Ris: $p = -15$, $\theta_{12} = \pi/2$, $\theta_{13} = 1.03$, $\theta_{23} = 0.64$)

Esercizio 4

Dati i vettori \vec{v}_1 e \vec{v}_2 con $|\vec{v}_1| = 2$ e $|\vec{v}_2| = 3$, determinare $|\vec{v}_3|$ in modo che $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 = 0$ essendo $\theta_{12} = 60^\circ$ l'angolo fra \vec{v}_1 e \vec{v}_2 . Calcolare inoltre l'angolo fra \vec{v}_1 e \vec{v}_3 e quello fra \vec{v}_2 e \vec{v}_3 .

(Ris: $\sqrt{19}$, 143.41° , 156.59°)

Esercizio 5

Siano dati i due vettori \vec{v}_1 e \vec{v}_2 di modulo rispettivamente 5 e 3 e formanti un angolo di $\pi/3 \text{ rad}$. Determinare le caratteristiche necessarie ad un versore \vec{v}_3 in modo che sia complanare ai due vettori dati e che

- $(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) \cdot \vec{v}_3 = 0$
- $(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) \wedge \vec{v}_3 = \vec{0}$

(indicare gli angoli fra \vec{v}_3 ed i vettori dati)

(Ris: caso 1 - $\theta_{13} = \pi/2 \pm 0.38$, $\theta_{23} = \pi/2 \mp 0.67$; caso 2 - $\theta_{13} = 0.38$, $\theta_{23} = 0.67$ oppure $\theta_{13} = \pi - 0.38$, $\theta_{23} = \pi - 0.67$)

Esercizio 6

Determinare l'angolo θ_{ab} fra il vettore $\vec{a} = \alpha(6\hat{i} - 3\hat{j})$ e $\vec{b} = \vec{a} + \hat{i}$. Quanto vale il suddetto angolo nel limite $\alpha \rightarrow \infty$?

(Ris: $\theta_{ab} = 0$)

Esercizio 7

Siano dati due vettori uguali in modulo \vec{a} e \vec{b} , determinare il modulo e l'angolo fra essi compreso sapendo che il loro prodotto vettoriale ha modulo 16 e la loro somma ha modulo 4.

(Ris: $a = b = 2\sqrt{5}$, $\theta = \arccos[-3/5]$)

Esercizio 8

Le componenti cartesiane di un vettore $v(\vec{t})$ delle dimensioni di una lunghezza e variabile nel tempo sono $(c_1 t, c_2 t^2 - c_3 t^3, c_4)$ con $c_1 = 4 \text{ m/s}$, $c_2 = 5 \text{ m/s}^2$, $c_3 = -1 \text{ m/s}^3$ e $c_4 = -3 \text{ m}$. Determinare la derivata prima, $a(\vec{t})$, e seconda, $b(\vec{t})$, di $v(\vec{t})$ rispetto al tempo. Calcolare quindi l'istante $t_0 \neq 0 \text{ s}$ in cui $a(\vec{t}_0)$ e $b(\vec{t}_0)$ sono simultaneamente non nulli ed ortogonali fra di loro.

(Ris: $t_0 = 10/3 \text{ s}$)

Esercizio 9

Siano \vec{a} e \vec{b} due vettori di modulo rispettivamente 3 e 5. Le rette direttrici dei due vettori formano un angolo di $\pi/4$. Calcolare il prodotto scalare $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

(Ris: $15\sqrt{2}/2$)

Esercizio 10

Siano \vec{a} e \vec{b} due vettori di componenti cartesiane $(3, 7, 1)$ e $(-1, 6, 0)$. Calcolare il seno dell'angolo θ_{ab} compreso tra di loro.

(Ris: $\sin \theta_{ab} = 0.55$)

Esercizio 11

Determinare il valore del parametro α per cui i due vettori $\vec{a} = 30\hat{i} + 2\alpha\hat{j} - \hat{k}$ e $\vec{b} = \hat{i} + 7\hat{j} + \alpha\hat{k}$ sono ortogonali.

(Ris: $\alpha = -30/13$)