Esercizi di Fisica LB

Esercitazioni di Fisica LB per ingegneri - A.A. 2003-2004

Esercizio 1

Una lampada ad incandescenza è alimentata da un generatore di corrente a $f = 220V$. Sapendo che la resistenza del suo filamento è $R_i = 400\,\Omega$ e che la luminosità è direttamente proporzionale alla potenza che dissipa, calcolare la grandezza di una resistenza che, messa in serie a quella dell'utilizzatore, ne dimezzi la luminosità.

Soluzione

Nelle condizioni iniziali, il circuito è percorso da una corrente data dalla legge di Ohm: la resistenza totale del circuito su cui è applicata la tensione f vale $R_T = R_i$ quindi

$$i_0 = \frac{f}{R_T} = \frac{f}{R_i}$$

e la luminosità L della lampada è proporzionale alla potenza dissipata dalla stessa per effetto Joule, quindi

$$L \propto P = i_0^2 R_i.$$

Aggiungendo una resistenza R in serie ad R_i la resistenza totale del circuito diventa $R_T = R_i + R$ (proprio perchè sono in serie); quindi la corrente che circola è data da

$$i_2 = \frac{f}{R_T} = \frac{f}{R + R_i}$$

. La luminosità della lampadina ora sarà proporzionale a

$$L_2 \propto P_2 = i_2^2 R_i;$$

la corrente che circola nel circuito, e quindi passa per la lampadina consentendole di dissipare calore e produrre luce, adesso è inferiore a quella iniziale, quindi, opportunamente tarando la resistenza R si riesce ad ottenere anche una luminosità dimezzata:

$$L_2 = \frac{L}{2} \Rightarrow P_2 = \frac{P}{2};$$

sostituendo le espressione trovate sopra per P e P_2 ci si riduce ad un'equazione nella variabile R che, una volta risolta, dà il valore della resistenza che deve essere messa in serie per dimezzare la luminosità della lampada. Risolvendola si ottiene:

$$R = (\sqrt{2} - 1)R_i.$$

Esercizio 2

Sono date resistenze: $R_1 = 10\,\Omega$, $R_2 = 15\,\Omega$, $R_3 = 20\,\Omega$. Le prime due sono in serie tra di loro, ed entrambe sono poi in parallelo ad R_3. Calcolare la resistenza totale. Sia poi $f = 200\,V$ la differenza di potenziale mantenuta costante da un generatore ai capi della resistenza totale descritta sopra, calcolare la corrente i che passa sul ramo che contiene R_1 ed R_2. Fare la stessa cosa dopo aver aggiunto una quarta resistenza $R_4 = 5\,\Omega$ in serie al tutto.

Soluzione

Le due resistenza R_1 ed R_2 sono in serie quindi il loro effetto è analogo a quello di un'unica resistenza

$$R_{12} = R_1 + R_2.$$

A questo punto le resistenze R_{12} ed R_3 sono in paralleo quindi il loro effetto sarà analogo a quello di un'unica resistenza che vale

$$R_T = \frac{R_{12} \cdot R_3}{R_{12} + R_3}.$$

Se viene applicata una differenza di potenziale pari a f ai capi di R_T si otterrà una corrente pari a

$$i_0 = \frac{f}{R_T};$$

questa corrente, per come è stata calcolata R_T, è quella che circolerebbe in un circuito costituito da un'unica maglia formata dal generatore f ed una resistenza R_T. Il sistema in questione, in realtà è un po' più complesso perchè R_T non è una singola resistenza ma un sistema di resistenze globalmente equivalenti a R_T. Questo significa che, nei tratti di circuito in cui le due configurazioni (quella con un'unica resistenza equivalente e quella con le tre resistenze) sono identiche circolerà effettivamente una corrente i_0, nelle altre zone, invece, questo non si può a priori supporre. Quindi la corrente che attraversa il generatore fino ai capi della sistema di resistenze è proprio i_0; giunta tuttavia ai capi del sistema di resistenze in questione, a causa della biforcazione dei circuito, la corrente i_0 si dividerà in due correnti i_{12} che attraversa il tratto di circuito in cui sono sistema R_1 ed R_2 e i_3 che attraversa R_3. Visto che la legge di Ohm deve valere in qualsiasi tratto di circuito vale che la differenza di potenziale ai capi di $R_1 + R_2$ deve essere dato da $i_{12}R_{12}$, ed ugualmente la differenza di potenziale ai capi di R_3 deve valere i_3R_3. Visto che, in questo caso, la differenza di potenziale ai capi di tali resistenze è uguale ed in particolare uguale ad f che è direttamente collegato ad esse (non c'è alcuna resistenza fra f ed il sistema R_T) allora

$$f = i_{12}R_{12} = i_3R_3$$

da cui

$$i_{12} = \frac{f}{R_{12}}.$$

Esercizio 3

Un condensatore carico di capacità $C_0 = 100\,pF$ e carica $Q = 10^9\,C$ scarica su un cavo lungo $l = 1\,m$, di sezione $S = 0.1\,mm^2$ d'argento ($\rho = 1.59 \cdot 10^{-8}\,\Omega \cdot m$). Calcolare in quanto tempo si dimezza la differenza di potenziale alle estremità del condensatore.

Soluzione

All'istante iniziale il condensatore è carico e la sua carica complessiva vale Q. Nota la sua capacità, si può calcolare la differenza di potenziale ai suoi estremi che vale

$$\Delta V = \frac{Q}{C_0}.$$

A causa di questa differenza di potenziale, se metto in contatto le armature fra di loro tramite un cavo conduttore ci sarà un passaggio di cariche che tende a neutralizzare l'eccesso di cariche sulle armature. Se il conduttore ha una resistenza non trascurabile, questo processo avviene in un tempo sufficientemente lungo. Il filo che unisce le armature, nel nostro caso, ha una resistività non trascurabile. La sua resistenza è quindi:

$$R = \frac{l}{S}\rho.$$

Vale a ciascun istante la legge di Ohm $\Delta V(t) = Ri(t)$ (differenza di potenziale e corrente dipendono in generale dal tempo durante il trasferimento di cariche). Per definizione

$$i(t) = \frac{dq}{dt}$$

essendo dq la carica che circola nel filo nel periodo dt. La carica Q in seguito allo scambio di cariche fra le armature va a zero ($Q \to 0$): in questo processo, dunque, la sua variazione nell'intervallo infinitesimo dt è $dQ = Q(t + dt) - Q(t) < 0$. In tale intervallo la carica dq che circola nel circuito (positiva) si puó ovviamente esprimere come $dq = -dQ$ visto che la carica che circola proviene proprio dalle armature. Dunque

$$i(t) = -\frac{dQ}{dt}$$

e la legge di Ohm si scrive come

$$\Delta V(t) = \frac{Q(t)}{C_0} = -R\frac{dQ(t)}{dt}.$$

Siamo, quindi ricondotti all'equazione differenziale

$$\frac{Q}{C_0} = -R\frac{dQ}{dt}$$

che si risolve separando le variabili Q e t:

$$-\frac{dt}{RC_0} = \frac{dQ}{Q}$$

da cui

$$-\int_0^t \frac{dt'}{RC_0} = \int_Q^{Q(t)} \frac{dQ'}{Q'}$$

che porta al risultato

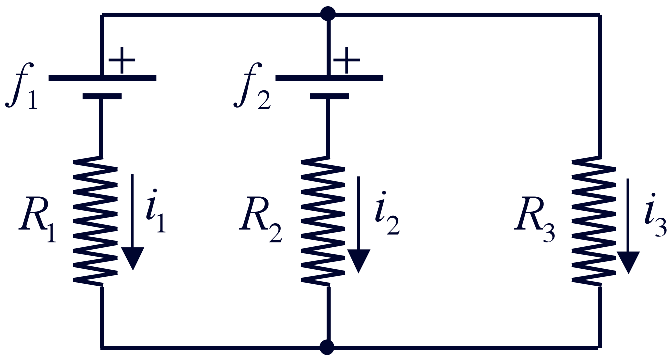
$$Q(t) = Qe^{-t/RC_0}.$$

Interessa calcolare l'istante τ in cui la differenza di potenziale (e quindi la carica nel caso di un condensatore piano) si dimezza ossia vale

$$\frac{Q}{2} = Qe^{\tau/RC_0};$$

tale istante si calcola facilmente ed è

$$\tau = RC_0 \ln 2.$$



Esercizi avanzati e d'esame

Esercizio 1

Nel circuito in figura i due generatori di tensione hanno forza elettromotrice pari a $f_1 = 8\,V$ e $f_2 = 4\,V$, mentre i tre resistori hanno resistenza pari a $R_1 = 200\,\Omega$, $R_2 = 100\,\Omega$ e $R_3 = 200\,\Omega$. Calcolare le intensità di corrente nei 3 rami (scrivendo, per convenzione, positive le correnti che scorrono nel verso indicato dalle frecce in figura e negative le correnti che scorrono nel verso opposto). (*Parziale del 27/05/2003*)

Soluzione

Le incognite sono tre, ovvero le tre correnti nel circuito. Servono quindi 3 equazioni indipendenti da mettere a sistema. La prima si ottiene imponendo la conservazione delle correnti in uno dei nodi del circuito, ovvero in un punto in cui si dividono le correnti. Prendiamo ad esempio il nodo P (punto in basso al centro del circuito disegnato in cui entrano le tre correnti i_1, i_2, i_3). Per come sono definite, le tre correnti sono tutte entranti in P. Visto che la somma delle correnti entranti deve essere uguale a quella delle correnti uscenti (altrimenti si avrebbe un accumulo di carica in P) e visto che da P non esce alcuna corrente (per come sono definiti i versi delle tre correnti) allora

$$i_1 + i_2 + i_3 = 0.$$

A questo punto partendo da P facciamo un giro completo sulla maglia che contiene le resistenze R_3 ed R_1 fino a ritornare in P:

$$V_P + i_3 R_3 - f_1 - i_1 R_1 = V_P$$

e ne facciamo pure uno sulla maglia che contiene solo R_2 ed R_3:

$$V_P + i_3 R_3 - f_2 - i_2 R_2 = V_P.$$

Le tre equazioni scritte sono fra di loro indipendenti e, messe a sistema, mi danno il valore ed il verso delle tre correnti.
Entriamo un po' meglio nel dettaglio. Quale criterio è stato utilizzato per scrivere le equazioni

sopra? Consideriamo la prima. In P ci sarà un certo potenziale elettrostatico. Tale potenziale varia secondo la legge di Ohm seguendo il circuito (altrimenti se tutto il circuito fosse allo stesso potenziale non ci sarebbe alcun passaggio di cariche). Percorriamo la maglia in senso antiorario. Quando si attraversa una resistenza si ha uno sbalzo di potenziale

$$\Delta V \equiv V(\text{dopo la resistenza}) - V(\text{prima della resistenza})$$

pari a $-iR$ se la corrente ha lo stesso nostro verso di percorrenza ed uno sbalzo pari a iR se ha verso opposto. Nel caso di R_3 il verso è opposto. Quindi, se M è un punto che si trova subito dopo ad R_3 vale

$$V_Q = V_P - V_P + V_Q = V_P + (V_Q - V_P) = V_P + i_3 R_3.$$

Quando invece si attraversa un generatore allora ΔV (definito come sopra) vale $+f$ se lo attraversiamo dal suo polo negativo a quello positivo, vale $-f$ se lo percorriamo in senso opposto! Nella maglia in questione lo attraversiamo in senso opposto da cui il $-f_1$. Infine la resistenza R_1 viene attraversata nel verso di percorrenza della corrente per tornare a V_P che quindi è al lato destro dell'equazione.
Risolvendo il sistema si ottiene:

$$i_2 = \frac{R_3 f_1 - (R_1 + R_3) f_2}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}.$$

Per ottenere le altre due correnti è sufficiente sostituire:

$$i_3 = \frac{f_1 - i_2 R_1}{R_3 + R_1}$$

$$i_1 = -i_2 - i_3.$$

Esercizio 2

In una sfera di raggio $R = 1\,m$ è presente una certa carica elettrica, distribuita con densità volumetrica pari a $\rho(r) = \rho_0\, e^{r^3/R^3}$, dove r è la distanza dal centro della sfera e $\rho_0 = 1\,C/m^3$. Calcolare l'intensità del campo elettrico a distanza $R/2$ dal centro della sfera. (*Parziale 06/05/2003*)

Soluzione

Nei problemi in cui la distribuzione di carica ha simmetria sferica si è già notato che il campo elettrico è diretto in senso radiale alla distribuzione di cariche. Il suo flusso attraverso una sfera S_r di raggio r centrata nel centro di simmetria della distribuzione vale

$$\phi_{S_r}(\vec{E}) = 4\pi r^2 E_r.$$

Per il teorema di Gauss questo flusso è uguale alla somma delle cariche contenute in S_r diviso ϵ_0. In questo caso le cariche contenute in S_R sono date da

$$Q_i = \int_{S_r} dV\, \rho(r)$$

in cui dV espresso in coordinate polari (ed integrando sugli angoli visto che ρ non dipende da tali angoli) vale

$$dV = 4\pi r^2\, dr.$$

Quindi

$$Q_i(r) = 4\pi \int_0^r dr\ r^2 \rho_0 e^{r^3/R^3} = \frac{4\pi\rho_0 R^3}{3}(e^{r^3/R^3} - 1)$$

e ottengo dal teorema di Gauss:

$$4\pi r^2 E_r = \frac{Q_i(r)}{\epsilon_0}$$

e dunque

$$E_r = \frac{Q(r)}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

A distanza $R/2$ dal centro della distribuzione il campo elettrico vale

$$E_{R/2} = \frac{4\pi\rho_0 R}{3\pi\epsilon_0}(e^{1/8} - 1).$$