Forze elettriche su cariche

La forza agente su una carica elettrica (in moto o ferma) in presenza di un campo elettrico $\vec{E}$ é data da $\vec{F} = q\vec{E}$. Va sempre ricordato che $\vec{E}$ (e di conseguenza $\vec{F}$) sono **vettori** e quindi la forza risultante non é caratterizzata solo da una intensitá ma anche da una direzione ed un verso. La forza $\vec{F}$ cosí otenuta é legata all' **accelerazione** della carica dalla seconda legge della dinamica $\vec{F} = m\vec{a}$. Nota l'accelerazione, é possibile in linea di principio risalire alla traiettoria della carica. Nel caso (solitamente ma non sempre verificato) in cui il campo $\vec{E}$ é costante si possono applicare le equazioni relative al moto uniformemente accelerato:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$$

Se invece il campo non é lo stesso in tutti i punti, può essere conveniente far uso del teorema della conservazione dell'energia meccanica.

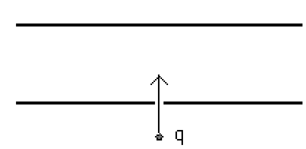
Esercizi preliminari

1. Esercizi che comportino il legame fra forza, accelerazione e traiettoria (FISICA 1)
2. Esercizi relativi al teorema della conservazione dell'energia meccanica (FISICA 1)

Esempi tratti da esercizi di esame

Esame 20/9/2002

Sul piatto inferiore di un condensatore piano di capacità $C = 1mF$ viene praticato un piccolo foro attraverso il quale viene lanciata una carica $q = 1\mu C$ con un'energia cinetica iniziale $K_0 = 1\mu J$. Si chiede quanta carica deve essere depositata sui piatti del condensatore se si vuole che la carica non raggiunga il piatto superiore (si trascuri la forza di gravità)



SOLUZIONE:

La carica, entrando all'interno del condensatore, viene decelerata dal campo elettrico fino a fermarsi. La condizione per la quale la carica non tocca la parete superiore del condensatore è che la sua velocità si annulli quando ha percorso la distanza d fra le armature del condensatore. Si può procedere in due modi:
A) Sfruttando il teorema dell'energia meccanica. Inizialmente la carica ha una energia cinetica K_0, mentre nel momento in cui si ferma ha energia cinetica nulla. Nel frattempo, però, ha acquisito energia potenziale $U = q\Delta V$, dove ΔV è la differenza di potenziale ai capi del condensatore. Ma allora

$$E_{in} = K_0 = E_{fin} = U = q\Delta V \rightarrow \Delta V = K_0/q = 1V$$

Essendo per definizione $Q = CV$, si ottiene $Q = 1mF1V = 1mC$

B) Scrivendo l'equazione del moto della particella. Il moto è uniformemente accelerato, e quindi, scegliendo l'asse x orientato come la velocità iniziale della particella e con origine nel foro del piatto inferiore

$$v(t) = v_0 - at = v_0 - (qE/m)t = v_0 - (q\Delta V/md)t$$
$$x(t) = v_0 t - 1/2 at^2 = v_0 t - (q\Delta V/2md)t^2$$

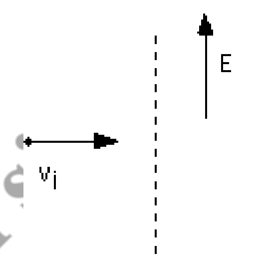
La condizione cercata si ottiene quando, nell'istante in cui la particella ha percorso una distanza d ($x(\bar{t}) = d$), la velocità della particella è nulla ($v(\bar{t}) = 0$). Ovvero

$$v_0 - (q\Delta V/md)\bar{t} = 0$$
$$v_0\bar{t} - (q\Delta V/2md)\bar{t}^2 = d$$

risolvedo il sistema di due equazioni nelle due incognite *bart* e ΔV così ottenuto e ricordando che $K_0 = 1/2mv_0^2$ si riottiene il risultato precedente.

Esame 20/1/2003 (scritto A)

Un protone ($q = 1.6 \times 10^{-19}C$, $m = 1.7 \times 10^{-27}kg$) viene lanciato con velocità iniziale $v_i = 1.00 \times 10^3 m/s$ in una regione di spazio in cui è presente un campo di modulo $|E| = 10.0V/m$ diretto perpendicolarmente alla velocità iniziale del protone. Se il protone entra nella regione in cui è presente il campo E al tempo $t = 0$ e ne esce al tempo $t_0 = 1.0 \times 10^{-5}s$, quanto vale il vettore $\vec{v}_f$ che determina la velocità del protone nell'istante t_0? Si discuta se tale velocità varia ulteriormente per $t > t_0$



SOLUZIONE:

La carica è soggetta a forze solo nella regione di spazio in cui è presente il campo elettrico. Il suo moto sarà quindi rettilineo uniforme prima e dopo essere passata per quella regione di spazio, e uniformemente accelerato nella regione di spazio interessata dal campo elettrico. Fissando un sistema di assi cartesiani in cui l'asse x sia parallelo alla velocità iniziale della particela e l' asse y parallelo al campo elettrico, le equazioni del moto del protone si possono scrivere:

$$\begin{gathered} a_x(t) = 0; a_y(t) = \frac{qE}{m} \\ v_x(t) = v_i; v_y(t) = \frac{qE}{m}t \\ x(t) = v_i t; y(t) = \frac{1}{2}\frac{qE}{m}t^2 \end{gathered} \tag{1}$$

per $0 < t < t_0$ (quando il protone è nella regione di spazo interessata dal campo eletrico), e

$$\begin{gathered} a_x(t) = 0; a_y(t) = 0 \\ v_x(t) = v_i; v_y(t) = v_y(t_0) \\ x(t) = v_i t; y(t) = y(t_0) + v_y(t_0)t \end{gathered} \tag{2}$$

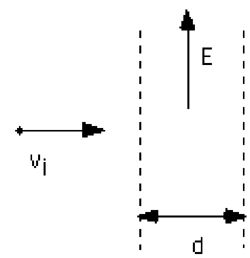
per $t > t_0$ (quando il protone è uscito dalla regione di spazio interessata dal campo elettrico). Per sapere quanto vale $\vec{v}(t_0)$ è quindi sufficiente inserire nell' equazione 3 il valore di t_0:

$$\vec{v}(t_0) = \{v_x(t_0), v_y(t_0\} = \{v_i, \frac{qE}{m}t_0\} = \{1.0 \times 10^3, 9.6 \times 10^3\}m/s$$

Dalle equazioni 4 si ricava inoltre che il valore di $\vec{v}$ non cambia per $t > t_0$, rimanendo sempre lo stesso per qualunque valore di t.

Esame 20/1/2003 (scritto B)

Un elettrone ($q = -1.6 \times 10^{-19}C$, $m = 9.1 \times 10^{-31}kg$) viene lanciato con velocità iniziale $v_i = 1.00 \times 10^5 m/s$ in una regione di spazio in cui è presente un campo di modulo $|E| = 1.0V/m$ diretto perpendicolarmente alla velocità iniziale dell'elettrone. Se la regione in cui è presente il campo E è larga $d = 3cm$, quanto vale il vettore $\vec{v}_f$ che determina la velocità dell' elettrone quando quest'ultimo esce dalla regione di spazio in cui è presente il campo elettrico?



SOLUZIONE:

La carica è soggetta a forze solo nella regione di spazio in cui è presente il campo elettrico. Il suo moto sarà quindi rettilineo uniforme prima e dopo essere passata per quella regione di spazio, e uniformemente accelerato nella regione di spazio interessata dal campo elettrico. Fissando un sistema di assi cartesiani in cui l'asse x sia parallelo alla velocità iniziale della particela e l' asse y parallelo al campo elettrico, le equazioni del moto del' elettrone si possono scrivere:

$$\begin{aligned} a_x(t) = 0; a_y(t) = \frac{qE}{m} \\ v_x(t) = v_i; v_y(t) = \frac{qE}{m}t \\ x(t) = v_i t; y(t) = \frac{1}{2}\frac{qE}{m}t^2 \end{aligned} \tag{3}$$

quando l' elettrone è nella regione di spazo interessata dal campo eletrico, e

$$\begin{aligned} a_x(t) = 0; a_y(t) = 0 \\ v_x(t) = v_i; v_y(t) = v_y(t_0) \\ x(t) = v_i t; y(t) = y(t_0) + v_y(t_0)t \end{aligned} \tag{4}$$

quando l' elettrone è uscito dalla regione di spazio interessata dal campo elettrico, avendo indicato con t_0 l'istante in cui l'elettrone esce dalla regione suddetta. Per sapere quanto vale $\vec{v}_f$ è quindi necessario determinare il tempo t_0 al quale l'elettrone esce dalla regione di spazio in cui è presente il campo elettrico. A tale scopo si può fare uso della terza delle equazioni 3, imponendo che $x(t_0) = d$:

$$x(t_0) = v_i t_0 = d \to t_0 = d/v_i(t) = 3.0 \times 10^{-7}$$

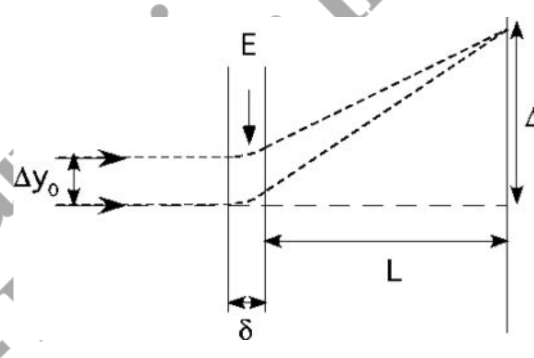
A questo punto è sufficiente inserire nell' equazione 3 il valore di t_0:

$$\vec{v}(t_0) = \{v_x(t_0), v_y(t_0)\} = \{v_i, \frac{qE}{m}t_0\} = \{1.0 \times 10^5, -5.3 \times 10^5\}m/s$$

Dalle equazioni 4 si ricava inoltre che il valore di $\vec{v}$ non cambia per $t > t_0$, rimanendo sempre lo stesso per qualunque valore di t.

Esame 22/7/2003

Due particelle aventi stessa massa m e stessa carica q vengono lanciate con velocità iniziali $\vec{v_1}$ e $\vec{v_2}$ lungo la direzione x. Entrambe le particelle attraversano una regione di spazio in cui è presente un campo $\vec{E}$ diretto lungo l'asse y. Si chiede quanto deve valere il campo $\vec{E}$ affinchè le due cariche arrivino a colpire nello stesso punto uno schermo posto a distanza L dalla regione dove è presente il campo $\vec{E}$ (v.figura). Dati: $m = 9 \times 10^{-31}$ kg, $q = -1.6 \times 10^{-19}$ C, $v_1 = 10^5$m/s, $v_2 = 2 \times 10^5$m/s, $L = 0.3$m, $\delta = 0.001$ m, $\Delta y_0 = 0.01$ m.



SOLUZIONE:

Attraversando una regione in cui è presente un campo trasverso alla velocità iniziale, una particella viene deviata di un angolo

$$tan(\theta) = \frac{qE\delta}{2K} = \frac{qE\delta}{mv_i^2}$$

dove v_i è la velocità iniziale lungo x. (Per ottenere questo risultato si considera che la particella è accelerata solo lungo l'asse y, e quindi la sua velocità lungo x rimane costante; essendo inoltre l'accelerazione lungo y costante, $v_y(t) = at = (qE/m)t$, e quindi quando la particella ha percorso una distanza δ lungo x la sua velocità lungo y sarà $v_y = (qE/m)(\delta/v_i)$ e quindi $tan(\theta) = v_y/v_x$ è data dall'espressione su citata).

Le coordinate y del punto in cui le due particelle arrivano a colpire lo schermo sono pertanto (trascurando il piccolo spostamento lungo y durante la traversata della regione in cui è presente ilcampo elettrico)

$$y_1 = \Delta y_0 + Ltan(\theta_1) = L\frac{qE\delta}{mv_1^2}$$

e

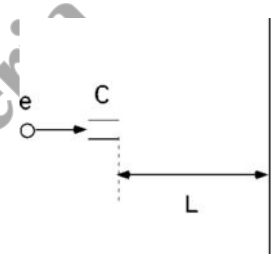
$$y_2 = \Delta y_0 + Ltan(\theta_2) = \Delta y_0 + L\frac{qE\delta}{mv_2^2}$$

Uguagliando y_1 e y_2 (le due particelle devono arrivare nello stesso punto dello schermo) si ottiene infine

$$E = \frac{\Delta y_0}{L\frac{q\delta}{m}(1/v_1^2 - 1/v_2^2)} = 2.5 \;\; N/C$$

Esame 20/9/2004

Un elettrone ($q = 1.6 \times 10^{-19}$ C, $m = 9.1 \times 10^{-31}$ kg) viene lanciato con velocità $v_0 = 6.0 \times 10^6$ m/s tra le armature di un condensatore piano di capacità $C = 1$ pF formato da due armature quadrate distanti $d = 0.1$ cm l'una dall'altra. Di quanto varia la posizione del punto in cui l'elettrone colpisce uno schermo posto a distanza $L = 20$ cm se la differenza di potenziale applicata al condensatore cambia di 0.5 V?



SOLUZIONE:

Attraversando il condensatore, in cui è presente un campo elettrico trasversale, l'elettrone devia rispetto alla direzione iniziale di un angolo la cui tangente è data da

$$\tan\theta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{a\delta t}{v_{x0}} = \frac{qE}{m}\frac{\Delta}{v_{x0}^2}$$

(il moto è uniformemente accelerato lungo l'asse y ($\rightarrow v_y(t) = at$) con accelerazione $a = qE/m$, ed il tempo di permanenza δt all'interno del condensatore è dato da $\delta t = \Delta/v_{0x}$ (dove Δ è il lato delle armature quadrate) essendo nulla l'accelerazione lungo x)
Il punto in cui l'elettrone colpisce lo schermo dista quindi

$$h = L\tan\theta = L\frac{qE}{m}\frac{\Delta}{v_{x0}^2}$$

dal punto in cui lo colpirebbe in assenza di campo elettrico deviante. Essendo all'interno di un condensatore $E = V/d$, chiamate V_1 e V_2 due valori di diferenza di potenziale applicati al condensatore si ha

$$h_1 - h_2 = L\frac{q}{md}\frac{\Delta}{v_{x0}^2}(V_1 - V_2)$$

Per ottenere il valore richiesto dal problema, è quindi necessario sapere quanto vale Δ, e per far questo si può far uso dell'espressione della capacità di un condensatore piano:

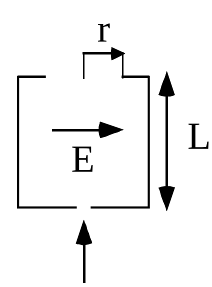
$$C = \epsilon_0\frac{A}{d} = \epsilon_0\frac{\Delta^2}{d} \rightarrow \Delta = \sqrt{\frac{Cd}{\epsilon_0}} = 1cm$$

Inserendo questo valore (ed i dati del problema) nell'espressione precedente si ottiene infine

$$h_1 - h_2 = 5.2mm$$

Esame 1/2/2005

Un fascio di particelle, tutte con energia cinetica $K_0 = 4 \times 10^{-20}$ J viene lanciato in una scatola cubica di lato $L = 1$ cm attraverso un foro posto a metà di uno dei suoi lati. Un secondo foro di raggio r viene praticato a metà del lato opposto al foro di entrata. All' interno della scatola è presente un campo elettrico $E = 20$ V/m, diretto come in figura. Il fascio è composto da protoni ($q_p = 1.6 \times 10^{-19}$ C) ed elettroni ($q_e = -q_p$). Calcolare il valore minimo di r per il quale tutte le particelle escono dalla scatola.



SOLUZIONE:

All'interno della scatola, sia i protoni che gli elettorni vengono accelerati in modo uniforme lungo la direzione del campo, mentre la componente di velocità perpendicolare al campo (e parallela alla velocità iniziale) rimane invariata. Scegliendo come asse x la direzione della velocità iniziale, come asse y la direzione del campo $\vec{E}$ e l'origine degli assi in corrispondenza del foro di entrata si ha quindi

$$x(t) = v_0 t$$

$$y(t) = \frac{1}{2}at^2 = \frac{qE}{2m}t^2$$

Elettroni e protoni raggiungono quindi il lato della scatola opposto a quello di entrata dopo un tempo $t_0 = L/v_0$. In quell'istante, la loro coordinata y sarà rispettivamente

$$y_e(t) = \frac{q_e E}{2m_e}t_0^2 = \frac{q_e E L^2}{2m_e v_0^2} = \frac{q_e E}{4K_0}$$

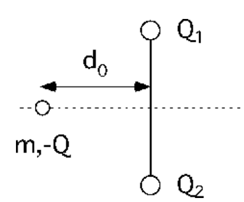
per gli elettroni e

$$y_p(t) = \frac{q_p E}{2m_p}t_0^2 = \frac{q_p E L^2}{2m_p v_0^2} = \frac{q_p E}{4K_0}$$

per i protoni. Essendo l'energia cinetica uguale per i due tipi di particella, ed essendo $q_e = -q_p$, elettroni e protoni si troveranno entrambi, nel momento in cui arrivano sul lato opposto a quello di entrata, ad una distanza $d = \frac{q_p E}{4K_0} = 2 \times 10^{-3}$ m dall' asse di entrata. In particolare, gli elettroni si troveranno ad una distanza d a sinistra (y negative) rispetto al foro di entrata, ed i protoni ad una distanza d a destra (y positive) del foro di entrata. Volendo che tutte le cariche escano dalla scatola, è quindi necessario che il foro di uscita abbia un raggio maggiore o uguale a d, e quindi deve essere $r \geq 2$ mm.

Esame 21/1/2004 (scritto A)

Due cariche uguali $Q_1 = Q_2 = Q$ sono disposte ad una distanza Δ l'una dall'altra. Una particella di massa m e carica $-Q$ viene posta sull'asse del segmento che unisce le due cariche Q_1 e Q_2 ad una distanza d_0 dal centro di tale segmento (v.figura). Se la particella viene lasciata libera di moversi, si chiede con quale velocità transiterà nel punto a metà fra le due cariche Q_1 e Q_2 ed in che punto si fermerà. Dati: $m = 0.01$ kg, $Q = 1.5 \times 10^{-6}$ C, $\Delta = 0.8m$ $d_0 = 0.3$m



SOLUZIONE:

Dato che non si richiedono i tempi di percorrenza della traiettoria, conviene utilizzare il teorema del lavoro e dell'energia cinetica. Essendo il campo elettrico conservativo, il lavoro è dato da $L = -Q\Delta V$ (la particella ha carica $-Q$), quindi per sapere L basta calcolare V. Sull'asse del segmento che unisce le due cariche, ad una distanza x dal centro del medesimo

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{Q_1}{R_1} + \frac{Q_2}{R_2}\right) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{Q}{\sqrt{(\Delta/2)^2 + x^2}}$$

Il teorema del lavoro e dell'energia cinetica dice allora che fra due generici istanti t_i e t_f

$$K_i - K_f = -Q(V_f - V_i) = \frac{Q^2}{2\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{(\Delta/2)^2 + x_i^2}} - \frac{1}{\sqrt{(\Delta/2)^2 + x_f^2}}\right)$$

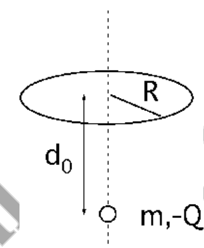
Essendo inizialmente la particella ferma, $K_i = 0$, ed inoltre dai dati del problema $x_i = -d_0 = -0.3$ m. Quando la particella passa per il punto mediano fra le due cariche, $x = 0$ e quindi

$$-K = Q(V_i - V) = \frac{Q^2}{2\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{(\Delta/2)^2 + d_0^2}} - \frac{2}{\Delta}\right) = -0.02J$$

Essendo $K = mv^2/2$, si ottiene infine $v = \sqrt{2K/m} = 2$ m/s. Per sapere dove si fermerà la particella, basta considerare che quando si ferma si ha di nuovo $K = 0$, e quindi il potenziale nel punto in cui si ferma deve essere uguale a quello del punto da cui la particella era partita. Data l'espressione di V, questo è possibile solo se $x_f^2 = x_i^2$, ovvero quando $x_f = -x_i = 0.3$ m.

Esame 21/1/2004 (scritto B)

Un anello isolante di raggio R ha carica complessiva Q. Una particella di massa m e carica $-Q$ viene posta sull'asse dell'anello ad una distanza d_0 dal centro dell'anello (v.figura). Se la particella viene lasciata libera di moversi, si chiede con quale velocità transiterà nel centro dell'anello ed in che punto si fermerà. Dati: $m = 0.01$ kg, $Q = 1.5 \times 10^{-6}$ C, $R = 0.8m$ $d_0 = 0.6$m



SOLUZIONE:

Dato che non si richiedono i tempi di percorrenza della traiettoria, conviene utilizzare il teorema del lavoro e dell'energia cinetica. Essendo il campo elettrico conservativo, il lavoro è dato da $L = -Q\Delta V$ (la particella ha carica $-Q$), quindi per sapere L basta calcolare V. Sull'asse dell'anello, ad una distanza x dal centro del medesimo

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\sqrt{R^2 + x^2}}$$

Il teorema del lavoro e dell'energia cinetica dice allora che fra due generici istanti t_i e t_f

$$K_i - K_f = -Q(V_f - V_i) = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{R^2 + x_i^2}} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + x_f^2}}\right)$$

Essendo inizialmente la particella ferma, $K_i = 0$, ed inoltre dai dati del problema $x_i = -d_0 = -0.3$ m. Quando la particella passa per il punto mediano fra le due cariche, $x = 0$ e quindi

$$-K = Q(V_i - V) = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{R^2 + d_0^2}} - \frac{1}{R}\right) = -0.005J$$

Essendo $K = mv^2/2$, si ottiene infine $v = \sqrt{2K/m} = 1$ m/s. Per sapere dove si fermerà la particella, basta considerare che quando si ferma si ha di nuovo $K = 0$, e quindi il potenziale nel punto in cui si ferma deve essere uguale a quello del punto da cui la particella era partita. Data l'espressione di V, questo è possibile solo se $x_f^2 = x_i^2$, ovvero quando $x_f = -x_i = 0.3$ m.