Fisica Generale L - Prof. M. Villa

CdL in Ingegneria Edile, Tecnico del Territorio

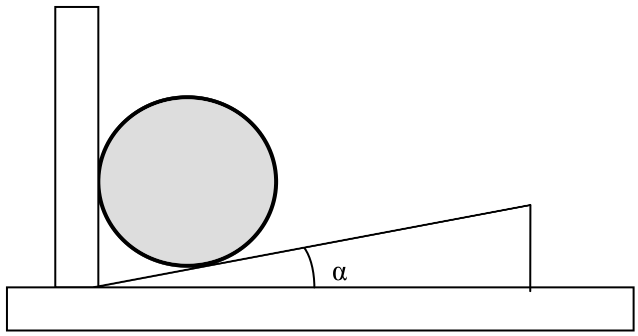
I parziale - 30 Maggio 2006

Esercizio 1: In un certo istante, un punto materiale è in moto lungo un arco di circonferenza. Sapendo che rispetto ad un certo SR, la velocità e l'accelerazione valgono $\vec{v} = 2\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - 3\hat{k} \quad (m/s)$ e $\vec{a} = -2\hat{\imath} + \hat{\jmath} \quad (m/s^2)$, determinare la velocità scalare, l'accelerazione tangenziale ed il raggio di curvatura della traiettoria.

Esercizio 2: La posizione di un punto materiale è individuata dal vettore posizione $\vec{r}(t) = 3(t+1)\hat{\imath} - t^2\hat{\jmath} + 2t^3\hat{k} \quad (m)$ con t espresso in secondi. Determinare la velocità e l'accelerazione ad ogni istante di tempo ed il raggio di curvatura della traiettoria nell'istante di tempo in cui la velocità è ortogonale all'accelerazione.

Esercizio 3: Un proiettile di massa M viene sparato orizzontalmente da fermo da un cannone posto su una altura che si eleva di *h=30 m* rispetto alla pianura circostante. Determinare:
1) il modulo *v* della velocità con cui si deve sparare il proiettile affinché colpisca un bersaglio nella pianura e che dista orizzontalmente dal cannone di *D=150 m*; 2) l'angolo con cui il proiettile colpisce il bersaglio; 3) la velocità scalare del proiettile quando colpisce il bersaglio.

Esercizio 4: Una pallina di massa M=0,2 kg è ferma tra una superficie verticale ed un piano inclinato di un angolo $\alpha = 15°$, come mostrato in figura. Determinare le reazioni vincolari della superficie verticale e del piano inclinato.



Domande:
5) Cos'è una grandezza fisica? Quali sono le grandezze fondamentali in meccanica?
6) Spiegare cosa sono i sistemi di riferimento inerziali ed il loro uso in fisica.
7) Spiegare che cosa si intende per problema *diretto* e per problema *inverso* della cinematica. Fornire almeno un esempio di problema inverso.
8) Un grave di massa M in caduta libera nell'aria è sottoposto ad una forza di attrito la cui espressione è: $\vec{F} = -k\vec{v}$ con $\vec{v}$ velocità del punto e *k* una costante. Sapendo che la velocità di caduta raggiunge un valore limite costante v_L, determinare quali, tra le seguenti formule, è fisicamente accettabile per v_L:
$a)\ v_L = Mg/k \qquad b)\ v_L = Mk/g \qquad c)\ v_L = kg/M \qquad d)\ v_L = Mgk$

Avvertenze: non è consentito consultare libri, appunti, compagni né avere in aula cellulari accesi o spenti. Risolvere almeno due esercizi e rispondere ad almeno due domande. Le risposte e le soluzioni devono essere espresse in termini dei simboli e dei dati specificati nel testo. Occorre spiegare i passi principali che hanno condotto alla soluzione. $g = 9{,}8\, m/s^2$

Fisica Generale L - Prof. M. Villa

CdL in Ingegneria Edile, Tecnico del Territorio

II parziale - 23 Giugno 2006

1) Un sistema meccanico, che si trova inizialmente fermo ad una altezza $h = 1,2\, m$ dal pavimento, è costituito da una pallina di massa $m_1 = 10\, g$ collocata in equilibrio (instabile) sopra una pallina di massa $m_2 = 5m_1$. Ad un certo istante, il sistema viene lasciato libero di cadere. Assumendo che ogni urto sia perfettamente elastico e trascurando le dimensioni delle palline, determinare: 1) l'altezza a cui rimbalza la pallina più leggera; 2) la velocità con cui arriva a terra la seconda pallina dopo l'urto. (Suggerimento: si tratti il problema come un problema unidimensionale e si immagini che la pallina superiore inizi a cadere un istante infinitesimo successivo all'inizio della caduta della pallina inferiore).

2) Due sferette di masse $m_1 = 20\, g$ e $m_2 = 2m_1$, assimilabili a punti materiali, sono appoggiate sopra un piano orizzontale liscio e collegate da un filo ideale lungo $L_i = 0,3\, m$. Inizialmente compiono un moto di rotazione attorno al centro di massa del sistema con una velocità angolare pari a $\omega = 12\, rad/s$. A partire da un certo istante, tramite un meccanismo interno, il filo viene accorciato fino ad una lunghezza pari a $L_f = L_i/2$. Determinare: 1) la velocità angolare finale del sistema; 2) il lavoro meccanico fatto dal meccanismo interno; 3) il moto del centro di massa.

3) Verificare se il campo di forze $\vec{F}(x,y,z) = -\alpha \left\{ 4x^3y\, \hat{\imath} + (x^4 - 2yz^3)\, \hat{\jmath} - 3y^2z^2\, \hat{k} \right\}$ è conservativo e calcolarne, eventualmente, l'espressione dell'energia potenziale.

4) Discutere il teorema di conservazione dell'energia meccanica.
5) Discutere le proprietà del centro di massa.
6) Discutere le equazioni cardinali della meccanica.

Avvertenze: non è consentito consultare libri, appunti, compagni né avere in aula cellulari accesi o spenti. Risolvere almeno due esercizi e rispondere ad almeno due domande. Le risposte e le soluzioni devono essere espresse in termini dei simboli e dei dati specificati nel testo. Occorre spiegare i passi principali che hanno condotto alla soluzione. $g = 9,8\, m/s^2$

Fisica Generale L - Prof. M. Villa

CdL in Ingegneria Edile, Tecnico del Territorio

Scritto totale - 23 Giugno 2006

1) Un sistema meccanico, che si trova inizialmente fermo ad una altezza $h = 1,2\,m$ dal pavimento, è costituito da una pallina di massa $m_1 = 10\,g$ collocata in equilibrio (instabile) sopra una pallina di massa $m_2 = 5m_1$. Ad un certo istante, il sistema viene lasciato libero di cadere. Assumendo che ogni urto sia perfettamente elastico e trascurando le dimensioni delle palline, determinare: 1) l'altezza a cui rimbalza la pallina più leggera; 2) la velocità con cui arriva a terra la seconda pallina dopo l'urto. (Suggerimento: si tratti il problema come un problema unidimensionale e si immagini che la pallina superiore inizi a cadere un istante infinitesimo successivo all'inizio della caduta della pallina inferiore).

2) Due sferette di masse $m_1 = 20\,g$ e $m_2 = 2m_1$, assimilabili a punti materiali, sono appoggiate sopra un piano orizzontale liscio e collegate da un filo ideale lungo $L_i = 0,3\,m$. Inizialmente compiono un moto di rotazione attorno al centro di massa del sistema con una velocità angolare pari a $\omega = 12\,rad/s$. A partire da un certo istante, tramite un meccanismo interno, il filo viene accorciato fino ad una lunghezza pari a $L_f = L_i/2$. Determinare: 1) la velocità angolare finale del sistema; 2) il lavoro meccanico fatto dal meccanismo interno; 3) il moto del centro di massa.

3) Su un punto materiale di massa $m = 80\,g$, agiscono una forza posizionale data da $\vec{F}(x,y,z) = -\alpha\left\{4y\,\hat{\imath} + (4x-2z)\,\hat{\jmath} - 2y\,\hat{k}\right\}$, con $\alpha = 2\,N/m$ e una forza non conservativa $\vec{F}_{NC}$. Sapendo che il punto si trova inizialmente nell'origine con velocità nulla e che raggiunge successivamente il punto di coordinate $P(1,1,1)$, dove la forza non conservativa è nulla, con una velocità data da $\vec{v}_f = 4\hat{\imath}\,(m/s)$, determinare: a) il lavoro della forza non conservativa; b) il raggio di curvatura della traiettoria nel punto P.

4) Discutere il teorema di conservazione dell'energia meccanica.

5) Spiegare le principali caratteristiche del moto armonico smorzato.

6) Discutere le equazioni cardinali della meccanica.

Avvertenze: non è consentito consultare libri, appunti, compagni né avere in aula cellulari accesi o spenti. Risolvere almeno due esercizi e rispondere ad almeno due domande. Le risposte e le soluzioni devono essere espresse in termini dei simboli e dei dati specificati nel testo. Occorre spiegare i passi principali che hanno condotto alla soluzione. $g = 9,8\,m/s^2$

ESAME SCRITTO DI FISICA GENERALE L
CdL in Ingegneria Edile e Tecnico del Territorio - Prof. M. Villa
13/7/2006

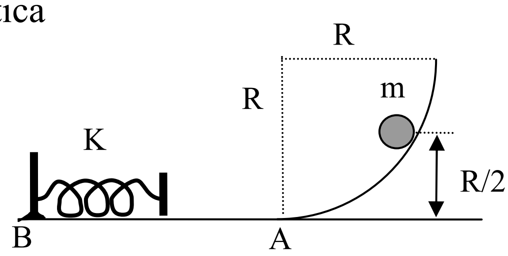
Esercizi:

1) Un punto materiale di massa m=30 g è inizialmente fermo su di un profilo circolare liscio di raggio R=20 cm ad una altezza H=R/2 rispetto al piano orizzontale. Scendendo lungo il profilo il punto incontra in A un piano orizzontale liscio su cui è vincolata in B una molla di costante elastica K=0,1 kg/s^{-2}, inizialmente a riposo. Determinare:

a) le componenti tangenziale (a_T) e centripeta (a_N) dell'accelerazione del punto nel punto iniziale ;

b) la reazione vincolare nel punto A;

b) la compressione massima della molla.

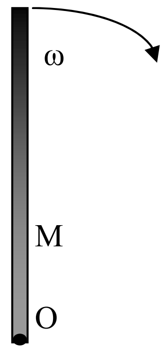


2) Sia dato il sistema mostrato in figura composto da un'asta *non* omogenea di massa M=2 kg e lunghezza L=1,2 m e spessore trascurabile la cui densità varia con la distanza (r) dall'estremo O secondo la relazione $\rho=kr^2$ (dove k è una costante positiva incognita). Il sistema ruota in un piano orizzontale attorno al punto O con velocità angolare costante ω. Determinare:

a) l'*espressione* della costante k in funzione di M ed L;

b) il momento di inerzia I_S della sbarra rispetto all'estremo O;

c) l'energia cinetica totale del sistema.



3) Dato il campo di forze $\vec{F}(\vec{r}) = K_1 x^2 \hat{i} - K_2 z \hat{j} - K_2 y \hat{k}$

a) Fare l'analisi dimensionale delle costanti K_i
b) verificare se e quando il campo è conservativo;
c) in caso affermativo scriverne il potenziale;
d) trovare il lavoro compiuto dalla forza quando sposta il suo punto di applicazione sul percorso O – A – B, dove i punti hanno coordinate x, y, z rispettivamente O (0,0,0), A(1,1,0), B(-2,1,-1), assumendo $K_1 = K_2 = 3$ nelle opportune unità di misura del SI.

Domande:

4) Enunciare e discutere il terzo principio della dinamica.
5) Discutere almeno due condizioni per cui una forza e' conservativa.
6) Cosa sono le forze di attrito e quali sono le loro caratteristiche?
7) Discutere le leggi della statica.

Avvertenze: non è consentito consultare libri, appunti, compagni né avere in aula cellulari accesi o spenti. Risolvere almeno due esercizi e rispondere ad almeno due domande. Le risposte e le soluzioni devono essere espresse in termini dei simboli e dei dati specificati nel testo. Occorre spiegare i passi principali che hanno condotto alla soluzione. $g = 9,8\,m/s^2$

ESAME SCRITTO DI FISICA GENERALE L
CdL in Ingegneria Edile e Tecnico del Territorio - Prof. M. Villa
08/09/2006

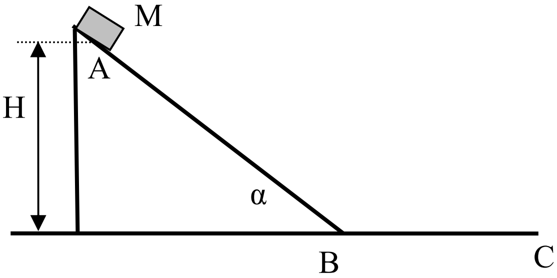
Esercizi:

1) Una cassa di massa M è appoggiata su di un piano scabro, inclinato di un angolo $\alpha=30°$ rispetto ad un piano orizzontale anch'esso scabro (vedi figura). Il coefficiente di attrito dinamico è ovunque pari a $\mu_D = 1/(2\cdot\sqrt{3})$. Supponendo che la cassa si trovi inizialmente in quiete ad una altezza H=24 m sul piano orizzontale (punto A) e che il punto B di raccordo tra i piani sia arrotondato, determinare:

a) la velocità massima V_M raggiunta dalla cassa;

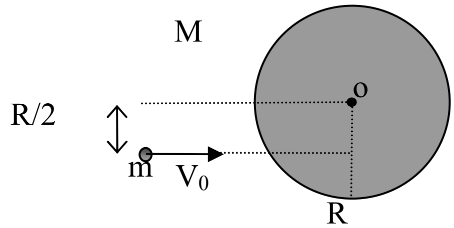
b) lo spazio totale percorso prima di fermarsi;

c) il lavoro complessivo fatto dalla forza d'attrito.



2) Un punto materiale di massa m=2M = 4 kg si muove su di un piano orizzontale liscio con velocità costante V_0 = 3 m/s. Ad un certo istante, muovendosi lungo una retta con braccio R/2 = 15 cm rispetto al centro del disco, urta in modo completamente anelastico un disco omogeneo di massa 4M e raggio R inizialmente fermo, ma libero di muoversi sul piano (vedi figura). Determinare:

a) quantità di moto finale del sistema;
b) il momento angolare K_I prima e K_F dopo l'urto, rispetto al centro O del disco;
c) l'energia ΔE rilasciata nell'urto.



3) Sia dato il campo di forze $\vec{F}(\vec{r}) = K_1(z+y)\hat{i} + K_2 x\hat{j} + K_3 x\hat{k}$.

a) Fare l'analisi dimensionale delle costanti K_i
b) Trovare la/le condizioni per cui il campo è conservativo;
c) In tali condizioni, scriverne il potenziale;
d) trovare il lavoro complessivo compiuto dalla forza quando sposta il suo punto di applicazione sul percorso O – A – B, dove i punti hanno coordinate x, y, z rispettivamente O (0,0,0), A(0,1,0), B(1,-2,-1), assumendo $K_1 = K_2 = K_3 = 2$ nelle opportune unità di misura del SI.

Domande:

4) Enunciare e discutere il primo principio della dinamica.
5) Discutere il teorema di conservazione dell'energia meccanica.

Avvertenze: non è consentito consultare libri, appunti, compagni né avere in aula cellulari accesi o spenti. Risolvere almeno due esercizi e rispondere alle domande. Le risposte e le soluzioni devono essere espresse in termini dei simboli e dei dati specificati nel testo. Occorre spiegare i passi principali che hanno condotto alla soluzione. $g = 9{,}8\,m/s^2$

SOLUZIONI SCRITTO DI FISICA GENERALE L
CdL in Ingegneria Edile e Tecnico del Territorio - Prof. M. Villa
08/09/2006

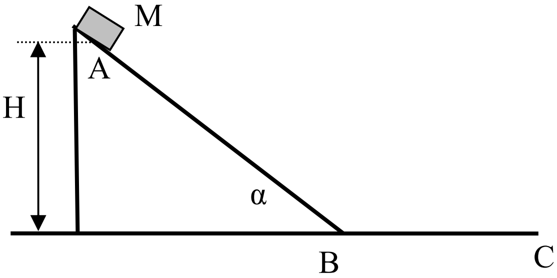
Esercizi:

1) Una cassa di massa M è appoggiata su di un piano scabro, inclinato di un angolo α=30° rispetto ad un piano orizzontale anch'esso scabro (vedi figura). Il coefficiente di attrito dinamico è ovunque pari a $\mu_D = 1/(2\cdot\sqrt{3})$. Supponendo che la cassa si trovi inizialmente in quiete ad una altezza H=24 m sul piano orizzontale (punto A) e che il punto B di raccordo tra i piani sia arrotondato, determinare:

d) la velocità massima V_M raggiunta dalla cassa;

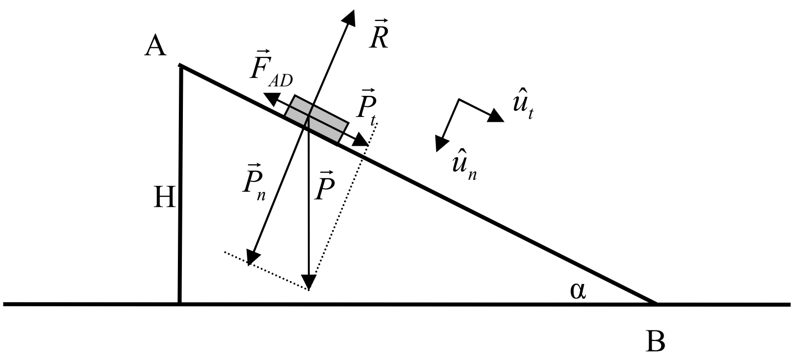
e) lo spazio totale percorso prima di fermarsi;

f) il lavoro complessivo fatto dalla forza d'attrito.



Soluzione:

a) Nel moto della cassa, distinguiamo due regioni: il moto lungo il piano inclinato AB e il moto lungo il piano orizzontale BC. Durante il primo moto agisce la forza peso e la forza d'attrito. Scomponendo tutte le forze secondo la direzione tangente al piano inclinato $\hat{u}_t$ e la sua perpendicolare $\hat{u}_n$, si ha:



$$\left|\vec{P}\right| = Mg$$

$$\vec{P}_n = Mg\cos\alpha\,\hat{u}_n$$

$$\vec{P}_t = Mg\sin\alpha\,\hat{u}_t$$

$$\vec{F}_{ad} = -\mu_d N\hat{u}_t$$

dove N è la forza di carico sul piano. In questo caso, la forza di carico corrisponde al componente P_n della forza peso. La reazione vincolare $\vec{R}$ è tale da eguagliare la forza di carico $\vec{P}_n$. Lungo il piano inclinato, il moto è quindi interamente dovuto al componente tangenziale della forza peso $\vec{P}_t$ e alla forza d'attrito. Dal secondo principio della dinamica, si ha quindi: $\vec{P}_t + \vec{F}_{AD} = m\vec{a}$. Introducendo una coordinata intrinseca s, che descrive il moto lungo il piano inclinato, e ponendo in A l'origine di tale coordinata s(A)=0, si ha:

$$\vec{P}_t + \vec{F}_{AD} = (mg\sin\alpha - \mu_d mg\cos\alpha)\hat{u}_t = m\vec{a} \quad \rightarrow (mg\sin\alpha - \mu_d mg\cos\alpha) = m\ddot{s}$$

Le equazioni del moto lungo il piano inclinato sono quindi:

$$\ddot{s} = g(\sin\alpha - \mu_d \cos\alpha) = g/4$$
$$\dot{s}(t) = gt/4 + \dot{s}_0 = gt/4$$
$$s(t) = gt^2/8 + \dot{s}_0 t + s_0 = gt^2/8$$

dove si è sfruttato il fatto che α=30° e che al tempo iniziale t=0, la cassa si trovava nel punto A con velocità nulla $(\rightarrow s_0 = 0, \dot{s}_0 = 0)$. *Si tratta di un moto uniformemente accelerato con accelerazione g/4. Per determinare la velocità massima, osserviamo che la velocità cresce linearmente con il tempo e quindi la velocità massima sarà raggiunta solo al termine della discesa, cioè quando la cassa raggiunge il punto B, dopo aver percorso uno spazio pari a* $l_1 = h/\sin\alpha = 2h$. *La cassa raggiunge il punto B ad un tempo dato da:* $s(t_B) = gt_B^2/8 = 2h \rightarrow \quad t_B = 4\sqrt{\frac{h}{g}}$. *In questo istante di tempo la cassa ha una velocità pari a:*

$$\dot{s}(t_B) = gt_B/4 = \sqrt{gh} \quad \rightarrow \quad V_M = \sqrt{gh} = 15{,}3\, m/s.$$

b) Raggiunto il punto B, la cassa si muove lungo un piano orizzontale. Se lo pensiamo come un piano inclinato di un angolo α'=0°, possiamo utilizzare i risultati precedenti. Il moto è ora dovuto solo alla forza d'attrito, in quanto la forza peso non ha componenti orizzontali. Introducendo una nuova coordinata intrinseca s', che descrive il moto lungo il piano orizzontale, e ponendo in B l'origine di tale coordinata s'(B)=0, si ha:

$$\vec{P}_t + \vec{F}_{AD} = (mg\sin\alpha' - \mu_d mg\cos\alpha')\hat{u}_t = -\mu_d mg\hat{u}_t = m\vec{a} \qquad \rightarrow -\mu_d mg = m\ddot{s}'$$

Le equazioni del moto lungo il piano orizzontale sono quindi:

$$\ddot{s}' = -\mu_d g = -g/(2\sqrt{3})$$
$$\dot{s}'(t) = -gt/(2\sqrt{3}) + \dot{s}'_B = -gt/(2\sqrt{3}) + \sqrt{gh}$$
$$s'(t) = -gt^2/(4\sqrt{3}) + \sqrt{gh}t + s'_B = -gt^2/(4\sqrt{3}) + \sqrt{gh}t$$

dove si è sfruttato il fatto che α'=0° e che al tempo iniziale t=0, la cassa si trovava nel punto B con velocità pari a V_M $(\rightarrow s'_B = 0, \dot{s}'_B = \sqrt{gh})$. *Il moto è un moto uniformemente decelerato. Per trovare lo spazio percorso prima di fermarsi occorre determinare il tempo in cui la cassa raggiunge il punto C. Questo punto è caratterizzato dal fatto di avere velocità nulla. Da cui:*

$$\dot{s}'(t_C) = -gt_C/(2\sqrt{3}) + \sqrt{gh} \equiv 0 \quad \rightarrow \quad t_C = 2\sqrt{3h/g}$$
$$s'(t_C) = -gt^2/(4\sqrt{3}) + \sqrt{gh}t = -\sqrt{3}h + 2\sqrt{3}h = \sqrt{3}h = l_2$$

Lo spazio totale percorso è quindi: $l_{tot} = l_1 + l_2 = (2+\sqrt{3})h = 89{,}6m$.

c) *Il lavoro della forza d'attrito può essere calcolato utilizzando la definizione del lavoro e sapendo che nei due tratti la forza d'attrito è costante e opposta allo spostamento:*

$$L_{FA} = \int_{AB} \vec{F}_{AD} \bullet d\vec{s} + \int_{BC} \vec{F}_{AD} \bullet d\vec{s}' = -\mu_d mg\cos\alpha l_1 - \mu_d mg l_2 = -mgh.$$

Questo risultato è talmente ovvio e poteva essere ottenuto con molti meno calcoli: se si analizza il comportamento di questo sistema fisico dal punto di vista energetico, si ha che inizialmente la cassa è ferma ad una certa quota h, cioè ha una energia totale meccanica data dall'energia potenziale mgh. Alla fine della caduta, il corpo scivola lungo il piano orizzontale fino a fermarsi. In questo punto l'energia cinetica e quella potenziale sono nulle. La cassa ha quindi perso una quantità di energia meccanica pari a mgh che corrisponde al lavoro fatto dalle forze non conservative. In questo caso l'unica forza non conservativa è l'attrito dinami-

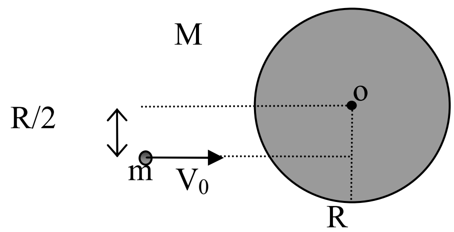
co. Utilizzando solo i concetti di energia e di lavoro delle forze d'attrito è poi possibile anche rispondere alle domande a) e b) senza passare per le equazioni del moto:

a) *Quando la cassa arriva in B, il bilancio energetico vale:* $E_B - E_A = L_{FA} = \int_{AB} \vec{F}_{AD} \bullet d\vec{s}$ *da cui è possibile ricavare V_M.*
$\frac{1}{2} m V_M^2 - mgh = -\mu_d mg \cos\alpha l_1$

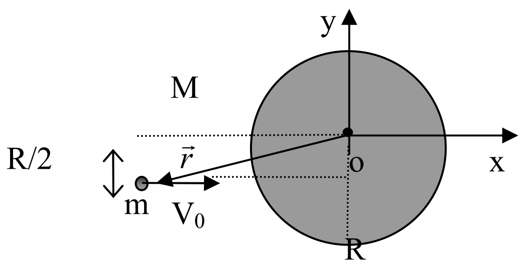
b) *Da* $L_{FA} = \int_{AB} \vec{F}_{AD} \bullet d\vec{s} + \int_{BC} \vec{F}_{AD} \bullet d\vec{s}' = -\mu_d mg \cos\alpha l_1 - \mu_d mg l_2 = -mgh$ *è possibile ricavare l_2 e quindi trovare $l = l_1 + l_2$.*

2) Un punto materiale di massa m=2M = 4 kg si muove su di un piano orizzontale liscio con velocità costante V_0 = 3 m/s. Ad un certo istante, muovendosi lungo una retta con braccio R/2 = 15 cm rispetto al centro del disco, urta in modo completamente anelastico un disco omogeneo di massa 4M e raggio R inizialmente fermo, ma libero di muoversi sul piano (vedi figura). Determinare:

a) quantità di moto finale del sistema;
b) il momento angolare K_I prima e K_F dopo l'urto, rispetto al centro O del disco;
c) l'energia ΔE rilasciata nell'urto.



Soluzione:



Anzitutto si definisce un sistema di riferimento. Scelgo arbitrariamente un sistema di riferimento con origine coincidente con il centro del disco e assi come in figura. Prima considerazione: il sistema punto materiale più disco è appoggiato su un piano orizzontale liscio, pertanto è libero di muoversi nelle due direzioni orizzontali. In tali direzioni però il sistema non è soggetto a forze, quindi è un sistema ***isolato****. Seconda considerazione: visto che il sistema è isolato, in tale sistema si conserva sia la quantità di moto che il momento angolare.*

a) *La quantità di moto finale è pari a quella iniziale:* $\vec{Q}_{fin} = \vec{Q}_{iniz} = \sum_i m_i \vec{v}_i = m\vec{v}_0 = 2MV_0\hat{\imath} = 12\, kg \cdot m/s\, \hat{\imath}$ *dove si è sfruttato il fatto che l'asse x è stato posto nella direzione di moto del punto materiale.*

b) *Per calcolare il momento angolare devo conoscere la posizione del punto materiale. Chiamo $\vec{r}$ tale posizione. Poiché il disco è inizialmente fermo, non contribuisce al calcolo del momento angolare:* $\vec{K}_I = \sum_i \vec{r}_i \wedge m_i \vec{v}_i = \vec{r} \wedge m\vec{v}_0 = (x\hat{\imath} - R/2\hat{\jmath}) \wedge 2MV_0\hat{\imath} = MRV_0\hat{k} = 0{,}9\, kg \cdot m^2/s\, \hat{k}$.
Visto che siamo in un sistema isolato, il momento angolare si conserva. Pertanto: $\vec{K}_F = \vec{K}_I = MRV_0\hat{\imath} = 0{,}9\, kg \cdot m^2/s\, \hat{k}$.

c) *L'energia rilasciata nell'urto è la differenza tra energia iniziale e quella finale. L'energia iniziale è di natura esclusivamente cinetica ed è dovuta al punto materiale (visto che il disco è fermo):* $E_{iniz} = \frac{1}{2} m V_0^2 = MV_0^2 = 18J$ *. L'energia finale* *è anch'essa di natura esclusivamente cinetica ed è dovuta a due contributi: l'energia cinetica di traslazione del sistema e quella di rotazione del sistema. L'energia cinetica di traslazione vale:* $E_{TF} = \frac{(m+m_{disco})V_F^2}{2} = \frac{Q_F^2}{2(m+m_{disco})} = \frac{MV_0^2}{3}$. *L'energia cinetica di rotazione vale:* $E_{RF} = \frac{1}{2}I\omega^2$, *dove I è il momento d'inerzia del sistema rispetto al suo centro di massa e ω è la velocità angolare. Quindi* $\Delta E = E_{fin} - E_{iniz} = E_{TF} + E_{RF} - E_{iniz}$. *In tale formula occorre determinare* E_{RF}. *Si può calcolare facilmente che nel momento dell'urto il centro di massa del sistema si trova ad una distanza R/3 dal centro del disco lungo il raggio che porta al punto materiale. Rispetto a tale punto il momento d'inerzia del disco vale (teo Huygens-Steiner):* $I_{disco} = I_{CMdisco} + m_{disco}d^2 = \frac{1}{2}m_{disco}R^2 + m_{disco}R^2/9 = \frac{22}{9}MR^2$. *Il momento d'inerzia del sistema vale:* $I = I_{disco} + I_{punto} = \frac{22}{9}MR^2 + 2M(2R/3)^2 = \frac{10}{3}MR^2$. *Rispetto al centro di massa del sistema il momento angolare iniziale (uguale a quello finale) vale:* $\vec{K}'_I = 2\vec{r}/3 \wedge m\vec{v}_0 = (x\hat{\imath} - R/3\hat{\jmath}) \wedge 2MV_0\hat{\imath} = \frac{2}{3}MRV_0\hat{k} = \vec{K}'_F$. *Poiché il modulo del momento angolare è dato anche da* $K'_F = I\omega$, *si trova che* $E_{RF} = \frac{K'^2_F}{2I} = \frac{1}{15}MV_0^2$. *Si trova quindi che l'energia dissipata nell'urto vale:* $\Delta E = E_{TF} + E_{RF} - E_{iniz} = \frac{1}{15}MV_0^2 + \frac{1}{3}MV_0^2 - MV_0^2 = -\frac{3}{5}MV_0^2$ *<0.*

3) Sia dato il campo di forze $\vec{F}(\vec{r}) = K_1(z+y)\hat{\imath} + K_2x\hat{\jmath} + K_3x\hat{k}$.

a) Fare l'analisi dimensionale delle costanti K_i
b) Trovare la/le condizioni per cui il campo è conservativo;
c) In tali condizioni, scriverne il potenziale;
d) trovare il lavoro complessivo compiuto dalla forza quando sposta il suo punto di applicazione sul percorso O – A – B, dove i punti hanno coordinate x, y, z rispettivamente O (0,0,0), A(0,1,0), B(1,-2,-1), assumendo $K_1 = K_2 = K_3 = 2$ nelle opportune unità di misura del SI.

Soluzione: a) L'analisi dimensionale è la determinazione delle unità di misura di una certa grandezza fisica e di come questa è collegata alle unità di misura fondamentali di massa, lunghezza e tempo. In ogni formula fisica, i termini a destra e a sinistra del segno di uguale devono essere espresse nelle stesse unità (hanno cioè le stesse dimensioni fisiche).

$$[\vec{F}(\vec{r})] = [K_1(z+y)\hat{\imath} + K_2 x\hat{\jmath} + K_3 x\hat{k}] \quad \rightarrow \quad [F] = [Newton] = [K_1(z+y)] = [K_2 x] = [K_3 x]$$

$$[F] = [Newton] = [K_1 metri] = [K_2 metri] = [K_3 metri] \quad \rightarrow \quad [K_i] = [Newton / metri] = [kg / s^2]$$

Le tre costanti K_1 , K_2 *e* K_3 *hanno tutte le stesse dimensioni e si misurano in Newton/metri o* kg/s^2*. b) Il campo è conservativo se è un campo irrotazionale, cioè se il rotore del campo di forze è nullo:* $\vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \vec{0}$*. Possiamo usare il determinante simbolico:*

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ K_1(y+z) & K_2 x & K_3 x \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial K_3 x}{\partial y} - \frac{\partial K_2 x}{\partial z}\right)\hat{\imath} + \left(\frac{\partial K_1(y+z)}{\partial z} - \frac{\partial K_3 x}{\partial x}\right)\hat{\jmath} + \left(\frac{\partial K_2 x}{\partial x} - \frac{\partial K_1(y+z)}{\partial y}\right)\hat{k} =$$

$$= 0\hat{\imath} + (K_1 - K_3)\hat{\jmath} + (K_2 - K_1)\hat{k}$$

Possiamo quindi vedere che in generale il rotore non è nullo. Sarà nullo solo quando valgono le condizioni: $\vec{\nabla} \wedge \vec{F} = (K_1 - K_3)\hat{\jmath} + (K_2 - K_1)\hat{k} \equiv \vec{0} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} K_1 = K_3 \\ K_2 = K_1 \end{cases} \quad \rightarrow \quad K_1 = K_2 = K_3$.

c) Quando $K_1 = K_2 = K_3 = K$ *il campo è irrotazionale e posso scrivere il potenziale. Questo può essere trovato facendo un integrale di linea che partendo dal punto O(0,0,0) passi in successione i punti A(x,0,0), B(x,y,0), C(x,y,z) facendo dei tratti rettilinei. Si trova che*

$$V(x,y,z) = -\int_{OABC} \vec{F}(x,y,z)\cdot d\vec{s} = -\left(\int_{OA} F_x(x',0,0)dx' + \int_{AB} F_y(x,y',0)dy' + \int_{BC} F_z(x,y,z')dz'\right) =$$

$$= -(0 + Kxy + Kxz) = -Kx(y+z)$$

d) Visto che il campo è conservativo, il lavoro dipende solo dal punto iniziale O e finale B secondo la formula: $L_{OB} = V(O) - V(B) = 0 - (-Kx_B(y_B + z_B)) = 2\cdot 1\cdot(-2-1) = -6J$.

Fisica Generale L - Prof. M. Villa

CdL in Ingegneria Edile (Sede di Ravenna)

16 Gennaio 2007

Esercizi:

1) Una slitta di massa 20 kg e con un carico di 70 kg viene trainata da un trattore per mezzo di una fune che forma un angolo di $+20°$ rispetto alla strada innevata (orizzontale). Durante la fase iniziale del moto si osserva che la tensione della fune è di 100 N (costante) e che l'attrito tra strada e slitta determina una forza d'attrito costante pari a 85 N in direzione opposta al moto. Supponendo che la slitta parta da ferma, determinare: 1) l'accelerazione della slitta ed il tempo t che essa impiega per raggiungere una velocità di 20 km/h; 2) il coefficiente di attrito cinetico μ_C tra slitta e strada; 3) la tensione nella fune se, dopo aver raggiunto una velocità di 20 km/h, la slitta prosegue di moto rettilineo uniforme.

2) Un oggetto puntiforme di massa $m = 2$ kg è inizialmente fermo nel punto di coordinate (0, 1m, 2m) all'interno di un campo di forze conservativo $\vec{F}(x,y,z) = A(xz^2\ \hat{\imath} + x^2z\ \vec{k})$ (dove $A = 0{,}2$ N/m^3). Sotto l'azione del campo $\vec{F}$ e di un'altra forza incognita $\vec{G}$ l'oggetto si mette in moto e si sposta nel punto di coordinate (3m, 1m, 0), raggiunto il quale esso si ferma. Calcolare il lavoro compiuto dalla forza $\vec{G}$. Quale delle tre componenti della forza $\vec{G}$ è sicuramente, in media, non nulla?

Domande:

3) Enunciare e discutere e il teorema della conservazione dell'energia meccanica.

4) Definire il momento di una forza, discutere le sue caratteristiche e fornirne un esempio di applicazione.

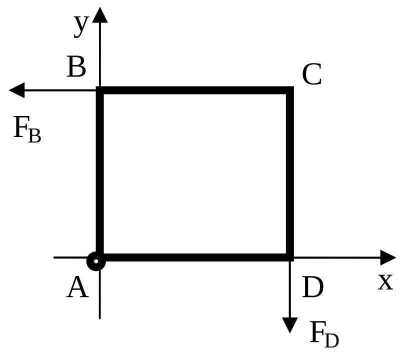
5) Descrivere le caratteristiche delle piccole oscillazioni.

Avvertenze: non è consentito consultare libri, appunti, compagni né avere in aula cellulari accesi o spenti. Risolvere almeno un esercizio e rispondere ad almeno due domande. Le risposte e le soluzioni devono essere espresse in termini dei simboli e dei dati specificati nel testo. Occorre spiegare i passi principali che hanno condotto alla soluzione. $g = 9{,}8\, m/s^2$

ESAME SCRITTO DI FISICA GENERALE L
CdL in Ingegneria Edile e Tecnico del Territorio - Prof. M. Villa
13/04/2007

Esercizi:

1) Una piastra quadrata di lato L=10 cm e massa M=0,5 kg è posta in un piano verticale come in figura ed è vincolata nell'estremo A. La piastra, libera di ruotare attorno ad un asse orizzontale passante per A e perpendicolare al piano della piastra, è soggetta alla forza peso, ad una forza orizzontale $\vec{F}_B$ di 8 N applicata nell'estremo B e ad una terza forza verticale $\vec{F}_D$ applicata nell'estremo D. Calcolare: 1) Il momento d'inerzia della piastra rispetto all'asse orizzontale passante per A; 2) la forza in D sapendo che la piastra e' in equilibrio statico; 3) la reazione vincolare in A.



2) Sia dato il campo di forze $\vec{F}(x,y,z)=\alpha\left[(2xy+z^2)\hat{\imath}+(2yz+x^2)\hat{\jmath}+(2xz+y^2)\hat{k}\right]$. Verificare se è conservativo e calcolarne in questo caso l'espressione dell'energia potenziale.

3) Un punto materiale, libero di muoversi lungo un asse x, è inizialmente fermo (a *t=0*) in *x=0 m* ed è soggetto ad una accelerazione pari a $a(t)=\ddot{x}=a_o\left(1-\frac{t}{\tau}\right)$ nell'intervallo di tempo $0<t<\tau$, con $a_o=3\,m/s^2$ e $\tau=2,5\,s$ e $a(t)=0$ per $t>\tau$. Determinare la velocità e la posizione del punto per $t=5\tau$.

Domande:

4) Enunciare e commentare brevemente la prima equazione cardinale della meccanica.
5) Enunciare e dimostrare il teorema delle forze vive.

Avvertenze: non è consentito consultare libri, appunti, compagni né avere in aula cellulari accesi o spenti. Risolvere almeno due esercizi e rispondere alle domande. Le risposte e le soluzioni devono essere espresse in termini dei simboli e dei dati specificati nel testo. Occorre spiegare i passi principali che hanno condotto alla soluzione. $g=9,8\,m/s^2$