Fisica Generale T2 - Prof. Mauro Villa

CdL in Ingegneria Elettronica e Telecomunicazioni

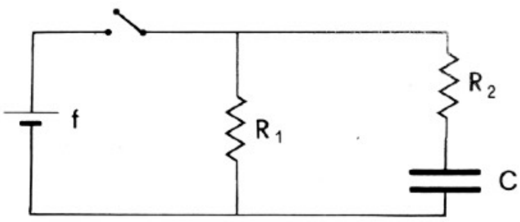
31 Ottobre 2017

Primo parziale - Compito A

Esercizi:

1) Una carica positiva è distribuita, con densità volumetrica ρ uniforme, nella regione di spazio limitata dai piani $x = -d$ e $x = d$. Si calcoli, assumendo che il potenziale sia nullo sul piano $x = 0$:
   1) il campo elettrostatico, per $-d < x < d$ e per $x < -d$ e $x > d$;
   2) il potenziale elettrostatico, per $-d < x < d$ e per $x < -d$ e $x > d$.
   3) Si determini, inoltre, la forza che agisce su una carica q posta a $x = 3d$ dalla regione.

2) Al tempo t = 0 viene chiuso l'interruttore del circuito mostrato in figura. Nell'ipotesi che si possa trascurare la resistenza interna del generatore, che il condensatore sia inizialmente scarico e che f = 50 V, R_1 = 5 Ω, R_2 = 10 Ω e C = 5 F, ricavare:



   1) la differenza di potenziale V(t) ai capi di C, al tempo t = 10s;
   2) le correnti che circolano nelle resistenze R_1 e R_2, al tempo t = 10s;
   3) l'energia totale immagazzinata da C alla fine del processo.

3) Sia dato il campo $\vec{E} = \hat{\imath}Ax^2 + \hat{\jmath}By^2$, dove A e B sono due costanti.
   1) Dimostrare che il campo è elettrostatico.
   2) Determinare la densità volumetrica ρ di carica prodotta dal campo.

Domande:

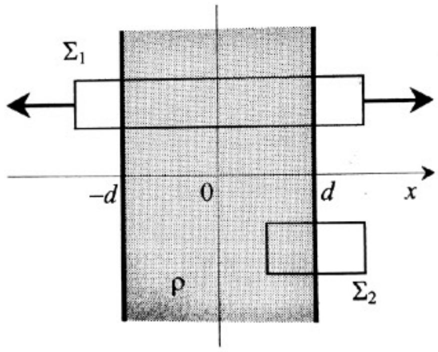
1) Discutere le proprietà dei conduttori.
2) Spiegare la legge di continuità della carica.
3) Descrivere il processo di scarica di un condensatore in un circuito RC.

Avvertenze: non è consentito consultare libri, appunti, compagni né avere in aula cellulari accesi o spenti. Le risposte e le soluzioni devono essere espresse in termini dei simboli e dei dati specificati nel testo. Negli esercizi occorre spiegare i passi principali che conducono alle soluzioni.

Nel caso servano, si usino i valori $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{C^2/(Nm)^2}$ *e* $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \mathrm{Ns^2/C^2}$.

Svolgimenti e soluzioni:

1) 1. Introduciamo un asse x perpendicolare allo strato carico, con origine nel centro dello strato, come mostrato in figura. Per calcolare il campo elettrico è opportuno applicare il teorema di Gauss. Data la simmetria della configurazione il campo elettrico è parallelo all'asse x, ha lo stesso modulo ma verso opposto sulle coppie di piani perpendicolari all'asse x, posti in posizioni simmetriche rispetto al piano $x = 0$.



Prima di tutto, calcoliamo il campo esterno. Consideriamo una superficie cilindrica con basi di area A poste in posizioni simmetriche rispetto allo strato (superficie Σ_1 mostrata in figura). Si ottiene:

$$\Phi(\vec{E}) = 2EA = \frac{\rho}{\epsilon_0}A2d\,.$$

Il campo elettrico esterno allo strato (quindi per $-d < x < d$) è uniforme ed è dato da:

$$\vec{E} = -\frac{\rho d}{\epsilon_0}\hat{u}_x \quad \text{per} \quad x < -d$$
$$\vec{E} = \frac{\rho d}{\epsilon_0}\hat{u}_x \quad \text{per} \quad x > d$$

Per calcolare il campo elettrico all'interno dello strato, consideriamo una superficie cilindrica Σ_2 posta a cavallo del piano $x = d$:

$$\Phi_{\Sigma_2}(\vec{E}) = -E(x)A + \frac{\rho d}{\epsilon_0}A = \frac{\rho A(d-x)}{\epsilon_0}$$

da cui si ottiene:

$$\vec{E} = \frac{\rho x}{\epsilon_0}\hat{u}_x\ .$$

2. Ricordando che $dV = -\vec{E}\cdot d\vec{r}$, nel nostro caso abbiamo $dV = -E\,dx$, e assumendo che il potenziale sia nullo per x = 0, si ottiene:

$$\int_0^{V(x)} dV = -\frac{\rho}{\epsilon_0}\int_0^x x\,dx$$

Quindi: $\quad V(x) = -\dfrac{\rho}{2\epsilon_0}x^2$.

Osservando che il potenziale è continuo in x = -d :

Per $x > d$: $\displaystyle\int_{V(d)}^{V(x)} dV = -\frac{\rho d}{\epsilon_0}\int_d^x dx$

Quindi: $\quad V(x) = V(d) - \dfrac{\rho d}{\epsilon_0}(x-d) = -\dfrac{\rho d}{2\epsilon_0}(2x-d)$

Per $x < -d$: $V(x) = V(-d) + \dfrac{\rho d}{\epsilon_0}(x+d) = -\dfrac{\rho d^2}{2\epsilon_0} + \dfrac{\rho d}{\epsilon_0}(x+d) = \dfrac{\rho d}{2\epsilon_0}(2x+d)$

3. Per determinare la forza che agisce sulla carica q posta a $x = 3d$, bisogna considerare il campo elettrico per $x > d$. Notando che questo è costante, quindi non dipende da x, la forza che agisce sulla carica q è sempre la stessa a prescindere dalla posizione occupata sull’asse x.

$$\overrightarrow{F} = q\overrightarrow{E} = q\frac{\rho d}{\epsilon_0}\hat{u}_x \,.$$

2) 1. Fissato il verso orario come positivo per le correnti di maglia, si hanno le seguenti equazioni di maglia:

$$f = (I_1 - I_2)R_1$$
$$-V(t) = I_2R_2 + (I_2 - I_1)R_1$$

Tenendo conto che $I_2 = dq_2/dt$, con $q_2(t)$ pari alla carica presente su C al tempo t, e che, dalla prima equazione della maglia,

$$I_1 = \frac{f}{R_1} + I_2 \qquad (1)$$

sostituendo nella seconda equazione, si ha:

$$-V(t) = \frac{dq_2}{dt}R_2 + (I_2 - \frac{f}{R_1} + I_2)R_1 = \frac{dq_2}{dt}R_2 - f = C\frac{dV}{dt}R_2 - f,$$

da cui:

$$\frac{dV}{f - V(t)} = \frac{dt}{R_2C} = \frac{dt}{\tau}, \quad \text{con } \tau = R_2C.$$

Integrando si ha:

$f - V(t) = A\, e^{-t/\tau}$ con A costante arbitraria che, per la condizione iniziale $V(0) = 0$, ha valore $A = f$.

Dunque:

$$V(t) = f(1 - e^{-t/\tau}) \qquad (2)$$

Per t = 10 s, si ha: $V = 50V \cdot (1 - e^{-\frac{10\,s}{10\Omega \cdot 5F}}) = 9.1\,V$.

2. La corrente che passa in R_1, ricordando la (1), è:

$$I_1 - I_2 = \frac{f}{R_1} = \frac{50V}{5\Omega} = 10\,A$$ e non dipende dal tempo.

Dalla (2) si ricava:

$$I_2 = C\frac{dv}{dt} = \frac{fC}{R_2C}e^{-t/\tau} = \frac{f}{R_2}e^{-t/\tau}$$ che è la corrente che passa in R_2

Calcoliamola per t = 10 s:

$$I_2 = \frac{f}{R_2}e^{-t/\tau} = \frac{50V}{10\Omega}e^{-\frac{10s}{10\Omega \cdot 5F}} = 4.1\,A$$

3. Alla fine del processo, quindi $t \to \infty$, la tensione ai capi del condensatore è

$$V(t) = f(1 - e^{-t/\tau}) \to_{t\to\infty} f$$

Quindi: $V = 50V$

L'energia totale immagazzinata dal condensatore è:

$$U_C = \frac{1}{2}Cf^2 = \frac{1}{2} \cdot 5F \cdot (50V)^2 = 6.25\,kJ$$

3) 1. Per dimostrare che il campo è elettrostatico devo dimostrare che $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$.

$\vec{E} = (Ax^2, By^2, 0)$, quindi:

$$\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{E} = \hat{i}(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}) - \hat{j}(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z}) + \hat{k}(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}) =$$

$$= \hat{i}(\frac{\partial}{\partial y}0 - \frac{\partial}{\partial z}By^2) - \hat{j}(\frac{\partial}{\partial x}0 - \frac{\partial}{\partial z}Ax^2) + \hat{k}(\frac{\partial}{\partial x}By^2 - \frac{\partial}{\partial y}Ax^2) = 0$$

2. Sapendo che $\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$, allora :

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}Ax^2 + \frac{\partial}{\partial y}By^2 = 2Ax + 2By$$

Allora: $\rho = \epsilon_0 \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{E} = 2\epsilon_0(Ax + By)$

Fisica Generale T2 - Prof. Mauro Villa

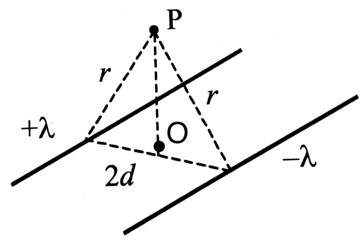
CdL in Ingegneria Elettronica e Telecomunicazioni

31 Ottobre 2017

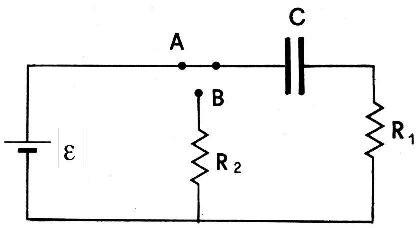
Primo parziale - Compito B

Esercizi:

1) Si considerino due fili rettilinei paralleli di lunghezza infinita, uniformemente carichi con densità lineare di carica $+\lambda$ e $-\lambda$, posti a distanza $2d$ l'uno dall'altro, come mostrato in figura. Si determini:
   1) il campo elettrico e il potenziale (considerando $V(0) = 0$) generati nel punto P posto sul piano perpendicolare ai fili, alla stessa distanza r dai due fili.
   2) la forza che agisce su una carica q posta in P e nel punto O.



2) Nel circuito mostrato in figura, tenendo il contatto in posizione A, il condensatore C viene caricato al suo massimo valore. Al tempo $t = 0$ s il contatto viene spostato in posizione B e così lasciato fino alla scarica completa di C.
   Si ha $C = 4$ mF, $\varepsilon = 40$ V, $R_1 = 2R_2 = 6$ kΩ. Calcolare:
   1) l'energia immagazzinata in C, in $t = 0$;
   2) la corrente che passa attraverso R_1 e R_2, per $t = 8$ s;
   3) l'energia dissipata in R_1 durante il processo di scarica.



3) Sia dato il campo $\vec{E} = A[\hat{\imath}xy + \hat{\jmath}(\frac{x^2}{2} + y^2)]$, dove A è una costante.
   1) Dimostrare che il campo è elettrostatico.
   2) Determinare la densità volumetrica ρ di carica che produce il campo elettrostatico.

Domande:

1) Dimostrare che la capacità di un condensatore non dipende dalla carica sulle armature.
2) Spiegare le leggi di Kirchhoff.
3) Discutere la legge di Gauss con alcuni esempi pratici.

Avvertenze: non è consentito consultare libri, appunti, compagni né avere in aula cellulari accesi o spenti. Le risposte e le soluzioni devono essere espresse in termini dei simboli e dei dati specificati nel testo. Negli esercizi occorre spiegare i passi principali che conducono alle soluzioni.
Nel caso servano, si usino i valori $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \mathrm{C^2/(Nm^2)}$ *e* $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \mathrm{Ns^2/C^2}$.

Svolgimenti e soluzioni:

1) 1. Il problema si risolve applicando il principio di sovrapposizione. Il campo elettrico $\vec{E}$ in P è dato dalla somma vettoriale dei campi $\vec{E_1}$ e $\vec{E_2}$ generati, separatamente dai due fili carichi.

Il campo elettrico generato da un filo rettilineo indefinito uniformemente carico si calcola utilizzando il teorema di Gauss. Data la simmetria del problema, il campo elettrostatico è dotato di simmetria cilindrica: è radiale ed ha lo stesso modulo in tutti i punti di superfici cilindriche coassiali col filo.

Utilizzando come superficie di Gauss una superficie cilindrica di raggio arbitrario r, di altezza arbitraria h, coassiale al filo, applicando il th di Gauss si ottiene:

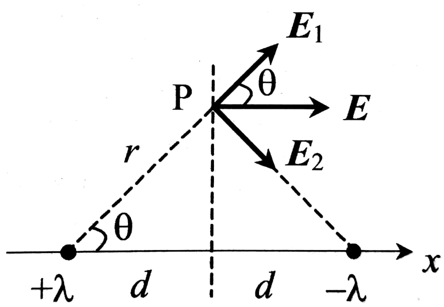
$$\Phi(\vec{E}) = 2\pi r h E = \frac{\lambda h}{\epsilon_0}$$

Si ha quindi:

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\hat{u_r}$$ avendo indicato con $\hat{u_r}$ il versore radiale uscente dal filo.

Nel caso in esame il campo elettrostatico totale in P è dato da

$$\vec{E} = \vec{E_1} + \vec{E_2}$$



dove:

$$|\vec{E_1}| = |\vec{E_2}| = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\ .$$

Con riferimento alla figura si ha:

$$\vec{E} = 2|\vec{E_1}|\cos\theta\hat{u_x}$$

avendo introdotto un asse *x* perpendicolare ad entrambi i fili e l'angolo θ tale che

$$\cos\theta = d/r\ .$$

Si ha, quindi: $\vec{E} = \frac{\lambda d}{\pi\epsilon_0 r^2}\hat{u_x}\ .$

Per calcolare il potenziale elettrostatico, ricordiamo che $V(r) = \int_0^r \vec{E}\cdot\vec{dr}$.

Allora:

$$V_1(P) = \int_0^r \vec{E_1}(P)\cdot\vec{dr} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\int_0^r \frac{1}{r}dr = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln r - V(0) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln r$$

$$V_2(P) = \int_0^r \vec{E_2}(P)\cdot\vec{dr} = \frac{-\lambda}{2\pi\epsilon_0}\int_0^r \frac{1}{r}dr = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln r - V(0) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln r$$

$V(P) = V_1(P) + V_2(P) = 0$

[Lo stesso risultato può essere ottenuto considerando il campo elettrico totale e la relazione $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{r}$.]

2. La forza che agisce sulla carica q nel caso in cui sia posta in P:

$$\vec{F} = q\vec{E} = q\frac{\lambda d}{\pi\epsilon_0 r^2}\hat{u}_x$$

Mentre, nel caso in cui la carica q sia posta in O, il campo elettrico che agisce è diverso, in quanto in O i campi sono entrambi diretti lungo l'asse x e hanno lo stesso verso (verso $-\lambda$):

$$\vec{E} = 2|\vec{E}_1|\hat{u}_x = \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0 r}\hat{u}_x \ ;$$

quindi la forza sarà:

$$\vec{F} = q\vec{E} = q\frac{\lambda}{\pi\epsilon_0 r}\hat{u}_x \ .$$

2) 1. Alla fine della carica, il condensatore, a tensione f, ha immagazzinato un'energia elettrostatica pari a:

$$U_C = \frac{1}{2}Cf^2 = \frac{1}{2}4\ mF \cdot (40V)^2 = 3.2\ J$$

2. Per t > 0, inizia il processo di scarica del condensatore, che avviene sulla serie delle resistenze R_1 e R_2 e quindi con la corrente che passa attraverso entrambe le resistenze pari a:

$$i(t) = \frac{f}{R_1+R_2}e^{-t/\tau} \qquad \text{con} \quad \tau = (R_1 + R_2)C \ .$$

Quindi la corrente che passa attraverso R_1 e R_2, al tempo t = 8 s, sarà:

$$I = \frac{40V}{6k\Omega+3k\Omega}e^{-\frac{8s}{(6k\Omega+3k\Omega)4mF}} = \frac{40V}{9k\Omega}e^{-0.2} = 3.6\ mA$$

3. La potenza dissipata per effetto Joule nelle due resistenze ha l'espressione:

$$P_1 = i^2 R_1 \quad \text{e} \quad P_2 = i^2 R_2$$

in cui appare la diretta proporzionalità alle resistenze R_1 e R_2, rispettivamente. Tale proporzionalità si estende, ovviamente, anche all'energia dissipata e quindi, essendo U l'energia totale disponibile, la frazione che si dissipa su R_1 sarà:

$U_1 = \frac{R_1}{R_1+R_2} U_C = \frac{6k\Omega}{6k\Omega+3k\Omega} \cdot 3.2J = 2.1\, J$

Si può anche ricavare integrando l'espressione della potenza $P_1(t)$:

$U_1 = \int_0^\infty P_1(t)dt = \int_0^\infty i^2(t)R_1 dt = R_1 \frac{f^2}{(R_1+R_2)^2} \int_0^\infty e^{-2t/\tau} dt$.

3) 1. Per dimostrare che il campo è elettrostatico devo dimostrare che $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$.

$\vec{E} = (Axy, A(\frac{x^2}{2} + y^2), 0)$, quindi:

$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \hat{i}(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}) - \hat{j}(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z}) + \hat{k}(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}) =$

$= \hat{i}(\frac{\partial}{\partial y} 0 - \frac{\partial}{\partial z} A(\frac{x^2}{2} + y^2)) - \hat{j}(\frac{\partial}{\partial x} 0 - \frac{\partial}{\partial z} Axy) + \hat{k}(\frac{\partial}{\partial x} A(\frac{x^2}{2} + y^2) - \frac{\partial}{\partial y} Axy) =$

$= \hat{k}(2A\frac{x}{2} - Ax) = 0$

2. Sapendo che $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$, allora :

$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} Axy + \frac{\partial}{\partial y} A(\frac{x^2}{2} + y^2) = Ay + 2Ay = 3Ay$

Allora: $\rho = \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \epsilon_0 3Ay$