Esame scritto di Fisica Generale LA, TA
SECONDO PARZIALE

INGEGNERIA CIVILE (A-K)

prof M. Villa

14/06/2010

(1)

Esercizio 1: Un'asta, di massa M e lunghezza L, ha una densità variabile come $\lambda(x) = \lambda_0 (3L + x)/L$, con 0<x<L. Calcolare: 1) la posizione del centro di massa e 2) il momento d'inerzia rispetto ad un'asse di rotazione coincidente con l'asse z che passa per l'estremo della sbarra meno denso. Se la sbarra ruota con una velocità angolare ω costante (in un piano orizzontale), trovare il modulo della reazione vincolare.

Esercizio 2: Sia dato un punto materiale di massa M su cui agisce una forza conservativa di energia potenziale: $V(x, y, z) = \alpha x^4 + \beta y^2 z^2$. Sapendo che le costanti α e β sono positive, che il punto è inizialmente in P(0,L,L) con velocità nulla, determinare: 1) l'espressione della forza; 2) le dimensioni e le unità di misura delle costanti α e β; 3) la velocità del corpo quando passa per l'origine delle coordinate.

Esercizio 3: Un carrello di massa M , libero di muoversi su un binario rettilineo (diretto lungo l'asse x), ma inizialmente fermo, è colpito da un proiettile di massa m=M/20 che viaggia con velocità v diretto lungo l'asse x. Nell'ipotesi di un urto totalmente anelastico, determinare: 1) la velocità del centro di massa dopo l'urto e 2) l'energia persa.

Domande:

1) Enunciare e spiegare il significato della seconda equazione cardinale della dinamica dei sistemi.
2) Definire il momento di inerzia e discuterlo.

Esame scritto di Fisica Generale LA, TA
SECONDO PARZIALE

INGEGNERIA CIVILE (A-K)

prof M. Villa

14/06/2010

(2)

Esercizio 1: Un'asta, di massa M=4 kg e lunghezza L=1m, è incernierata ad un estremo e giace in quiete su un piano orizzontale liscio. Ad un certo punto, per un periodo di tempo di 1s agisce un momento delle forze di 3 Nm in direzione perpendicolare al piano. Determinare: 1) momento d'inerzia della sbarra; 2) velocità angolare al termine dell'azione del momento delle forze, 3) modulo della reazione vincolare dopo l'azione del momento delle forze.

Esercizio 2: Sia dato un punto materiale di massa M su cui agisce una forza di espressione: $\vec{F}(x,y,z) = \alpha x\hat{\imath} - \beta z\hat{\jmath} + \alpha y\hat{k}$. Sapendo che la costante α è positiva, che il punto è inizialmente in P(L,L,0) con velocità v, determinare: 1) le condizioni per le quali la forza è conservativa, 2) l'espressione dell'energia potenziale; 3) le dimensioni e le unità di misura della costante α.

Esercizio 3: Un carrello di massa M , libero di muoversi su un binario rettilineo (diretto lungo l'asse x), ma inizialmente fermo, è colpito da un proiettile di massa m=M/30 che viaggia con velocità v diretto lungo l'asse x. Nell'ipotesi di un urto totalmente elastico, determinare le velocità del carrello e del punto dopo l'urto.

Domande:

1) Descrivere il moto di un pendolo semplice in regime di piccole oscillazioni.

2) Enunciare e spiegare il secondo teorema del centro di massa.

Traccia delle soluzioni al compito (1)

Es 1: Occorre esprimere la massa in termini di densità lineare, quindi calcolare massa, centro di massa e momento d'inerzia. La sbarra può essere considerata un sistema rigido soggetto solo alla forza vincolare. La reazione vincolare si trova calcolando l'accelerazione del centro di massa.

$$M = \int_0^L \lambda(x)dx = \frac{7}{2}\lambda_0 L \qquad x_{CM} = \frac{1}{M}\int_0^L x\lambda(x)dx = \frac{11}{21}L$$

$$I = \int_0^L x^2\lambda(x)dx = \frac{5}{4}\lambda_0 L^3 = \frac{10}{28}ML^2$$

$$\left|\vec{R}_v\right| = M\left|\vec{a}_{CM}\right| = M\omega^2 x_{CM} = \frac{11}{21}M\omega^2 L$$

Es 2: Data l'energia potenziale possiamo calcolare la forza come meno gradiente dell'energia potenziale. La velocità all'origine è calcolabile facilmente richiedendo la conservazione dell'energia meccanica. Non serve risolvere completamente l'equazione del moto.

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}V = -4\alpha x^3\hat{\imath} - 2\beta yz^2\hat{\jmath} - 2\beta y^2 z\hat{k}$$

$$[\alpha] = [\beta] = \left[ML^{-2}T^{-2}\right], \quad unità \quad kg/m^2/s^2$$

$$E_{in} = E_{fin} \Rightarrow \beta L^4 = \frac{1}{2}Mv^2 \Rightarrow v = L^2\sqrt{\frac{2\beta}{M}}$$

Es. 3. Nell'urto si conserva la quantità di moto, che per il primo teorema del centro di massa può essere espressa come massa del sistema per velocità del centro di massa. Visto che l'urto è anelastico la velocità del centro di massa è comune ai due punti e quindi è possibile calcolare l'energia finale. L'energia persa e' pari all'energia finale meno quella iniziale.

$$Q_{in} = mv = Q_{fin} = (m+M)v_{CM} = \frac{21}{20}Mv_{CM} \quad \Rightarrow v_{CM} = \frac{20mv}{21M} = \frac{v}{21}$$

$$E_{in} = \frac{1}{2}mv^2 \quad E_{fin} = \frac{1}{2}(m+M)v_{CM}^2 \Rightarrow \Delta E = E_{fin} - E_{in} = -\frac{Mv^2}{21}$$

Traccia delle soluzioni al compito (2)

Es 1: Occorre calcolare il momento d'inerzia per un asse che si trova ad una distanza L/2 dal centro di massa. Possiamo usare il teorema di Huygens-Steiner. L'azione del momento di forza costante imprime un'accelerazione angolare costante per un tempo fissato. Visto che la sbarra parte da ferma la velocità angolare al termine è calcolabile come accelerazione angolare per tempo. Dopo l'azione del momento delle forze non vi sono più momenti esterni e la sbarra si muove di moto rotatorio uniforme. Il centro di massa si muove di moto circolare. Il vincolo fornisce l'unica forza esterna che (secondo teorema del centro di massa) è collegabile all'accelerazione del CM.

$$I = I_{CM} + MD^2 = \frac{1}{12}ML^2 + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}ML^2 = 1.33 kgm^2$$

$$I\dot{\vec{\omega}} = \vec{M}^{EST} \Rightarrow \dot{\vec{\omega}} = \frac{\vec{M}^{EST}}{I} \Rightarrow \vec{\omega}(t) = \vec{\omega}(0) + \frac{\vec{M}^{EST}}{I}t \Rightarrow \omega(T) = \frac{M^{EST}}{I}T = 2,25 s^{-1}$$

$$\left|\vec{R}_v\right| = M\left|\vec{a}_{CM}\right| = M\omega^2 L/2 = \frac{81}{8}N = 10,1N$$

Es 2: Una forza è conservativa solo se è irrotazionale. Imponendo che il rotore sia nullo si trova una condizione sulle costanti α e β. In queste condizioni è possibile calcolare il potenziale. La velocità all'origine è calcolabile facilmente richiedendo la conservazione dell'energia meccanica. Non serve risolvere completamente l'equazione del moto.

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \beta = -\alpha$$

$$V(x,y,z) = -\alpha\frac{x^2}{2} - \alpha yz$$

$$[\alpha] = [\beta] = \left[MT^{-2}\right], \quad unità \quad kg/s^2$$

Es. 3. L'urto è collineare ed elastico. Imponendo la conservazione della quantità di moto e l'energia si trovano due equazioni nelle due incognite velocità del punto e del carrello dopo l'urto.

$$v_p = -\frac{29}{31}v \quad v_c = \frac{2}{31}v$$