Esame scritto di Fisica Generale TA e T1

INGEGNERIA GESTIONALE e DEI PROCESSI GESTIONALI (A-K), CIVILE, CHIMICA, MECCANICA, AMBIENTE E TERRITORIO

(proff. A. Bertin, N. Semprini-Cesari, M. Villa, A. Zoccoli e S. Zucchelli)

9/09/2010

1) Una sbarra omogenea di massa M, lunghezza R e dimensioni lineari trascurabili è appesa nel punto A che ne costituisce un estremo, ed è inizialmente in quiete e disposta verticalmente. Un punto materiale di massa m_P incognita, velocità iniziale di modulo v_P e direzione orizzontale urta istantaneamente ed elasticamente la sbarra nell'estremo inferiore B di questa. Sapendo che dopo l'urto il punto materiale procede nella stessa direzione e nello stesso verso con velocità di modulo $v = (5/7)\ v_P$, e trascurando ogni tipo di attrito determinare le espressioni:

a) della massa m_P del punto materiale in funzione di quella della sbarra M;

b) del modulo dell'accelerazione a_{CM} assunta dal centro di massa della sbarra nell'istante immediatamente successivo all'urto;

c) del modulo della reazione vincolare T immediatamente dopo l'urto.

2) Due punti materiali P_1 e P_2 aventi la stessa massa inerziale $m = 1\ g$ sono lanciati verso l'alto, in assenza di attrito, con velocità avente lo stesso modulo $v = 100\ m\ s^{-1}$, ma rispettivamente lungo la verticale (P_1) e lungo una direzione che forma un angolo di $\pi/3$ con l'orizzontale (P_2). Determinare i valori delle massime quote h_1 e h_2 raggiunte dai due punti materiali.

3) Un campo di forza è definito in tutto lo spazio dall'espressione

$$\vec{F} = (2k_1 y^2 z^3 + k_2)\hat{\imath} + 4k_1 x\, y z^3\, \hat{\jmath} + 6k_1 x\, y^2 z^2\, \hat{k},$$

con k_1 e k_2 costanti note aventi le opportune dimensioni. Verificare se il campo è conservativo, e in tal caso determinarne l'energia potenziale V.

Domande:

1) Definire e discutere le differenze tra forza centrifuga e forza centripeta.

2) Enunciare le leggi di Keplero sul moto dei pianeti del sistema solare e illustrarne il significato.

Soluzioni compito 1
Esercizio 1
a)
$\vec{R}^{(e)} \neq 0 \Rightarrow \dot{\vec{Q}} \neq 0$

$\vec{M}^{(e)} = 0 \Rightarrow \dot{\vec{K}} = 0 \Rightarrow m_p v_p R = m_p v'_p R + I\omega$

inoltre l'urto perfettamente elastico conserva l'energia cinetica: $\frac{1}{2}m_p v_p^2 = \frac{1}{2}m_p v_p'^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$

$$I = \int_0^R \frac{M}{R} l^2\, dl = \frac{M}{R}\frac{R^3}{3} = \frac{1}{3}MR^2$$

$$\begin{cases} m_p v_p R = m_p v'_p R + I\omega \\ \frac{1}{2}m_p v_p^2 = \frac{1}{2}m_p v_p'^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega = \frac{m_p R}{I}\left(v_p - v'_p\right) = \frac{m_p R}{I}\left(1-\frac{5}{7}\right)v_p = \frac{6}{7}\frac{m_p v_p}{MR} \\ I\omega^2 = m_p\left(v_p^2 - v_p'^2\right) = m_p\left(1-\frac{5}{7}\right)^2 v_p^2 = \frac{1}{3}MR^2\left(\frac{6}{7}\frac{m_p v_p}{MR}\right)^2 \end{cases}$$

$$\frac{24}{49}m_p v_p^2 = \frac{12}{49}\frac{m_p^2 v_p^2}{M} \Rightarrow \frac{m_p}{M} = 2$$

b) Il centro di massa della sbarra descrive, a causa del vincolo, un arco di circonferenza =>la sua accelerazione sarà totalmente centripeta e dipendente dalla velocità angolare tramite la relazione: $a_{CM} = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$. Nell'istante immediatamente successivo all'urto quindi $a_{CM} = \omega^2 R = \left(\frac{6}{7}2\frac{v_p}{R}\right)^2\frac{R}{2} = \frac{72}{49}\frac{v_p^2}{R}$.

c) Applicando il secondo principio della dinamica: $\vec{R} = \vec{T} + \vec{P} = M\vec{a}_{CM} \Rightarrow T = Mg + Ma_{CM} = M\left(g - \frac{72}{49}\frac{v_p^2}{R}\right)$

Esercizio 2

La quota massima si raggiunge a $h = \frac{1}{2}\frac{v_y^2}{g} \Rightarrow h_1 = \frac{1}{2}\frac{v_1^2}{g} = \frac{1}{2}\frac{(100)^2}{9.81} \simeq 510m$ mentre

$$h_2 = \frac{1}{2}\frac{\left(v_2 \sin\frac{\pi}{3}\right)^2}{g} = \frac{1}{2}\frac{\left(100\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{9.81} \simeq 382m$$

Esercizio 3

$\frac{\partial F_x}{\partial y} = 4k_1 yz^3 = \frac{\partial F_y}{\partial x}$; $\frac{\partial F_x}{\partial z} = 6k_1 y^2 z^2 = \frac{\partial F_z}{\partial x}$; $\frac{\partial F_y}{\partial z} = 12k_1 xyz^2 = \frac{\partial F_z}{\partial y}$; => campo conservativo

$$-V = \int_{(0,0,0)}^{(x,0,0)} \left(2k_1 y^2 z^3 + k_2\right)dx + \int_{(x,0,0)}^{(x,y,0)} 4k_1 xyz^3\, dy + \int_{(x,y,0)}^{(x,y,z)} 6k_1 xy^2 z^2\, dz = k_2 x + 2k_1 xy^2 z^3$$