Distribuzione di Poisson

la distribuzione binomiale (o Bernulliana) fornisce la probabilita' di successo in ripetuti esperimenti indipendenti in ciascuno dei quali di base vi siano solo due possibili risultati (esperimenti binari), quale ad es. il lancio ripetuto di una moneta

$$P_N(k,p) = Prob\{k \; successi \; in \; N \;\; prove\}$$

$$P_N(k,p) = \binom{N}{k} p^k q^{N-k} \quad dove \quad q = (1-p) \qquad \binom{N}{k} = \frac{N!}{k!\,(N-k)!}$$

$$< k >= Np \qquad Var(k) = Npq \qquad r.m.s. = \sqrt{Npq}$$

consideriamo l'andamento della distribuzione binomiale nel caso la probabilita' di successo sia molto piccolo, al limite tendente a zero (e $p \to 0$ implica che si e' in presenza di **eventi rari**) ma, contemporaneamente, operiamo al limite di un grande numero N di prove di modo che il valor medio Np rimanga finito

cio' significa valutare l'andamento della distribuzione binomiale nelle condizioni limiti di

$$p \to 0 \quad N \to \infty \;\; \text{con} \;\; Np \; = \text{costante} \; = \mu$$

si parla di **eventi rari,** ma dato che N diventa molto grande $(N \to \infty)$ e' conveniente usare una approssimazione nel calcolo del fattoriale

$$\boxed{N! \approx \sqrt{2\pi N}\; N^N e^{-N}}$$

approssimazione di Sterling

utilizzando questa approssimazione $\displaystyle P_N(k,p) = \frac{N!}{k!\,(N-k)!} p^k (1-p)^{N-k} \simeq$

$$\simeq \frac{1}{k!} \frac{\sqrt{2\pi N}\; N^N e^{-N}}{\sqrt{2\pi(N-k)}\;\; (N-k)^{(N-k)} e^{-(N-k)}} \left(\frac{\mu}{N}\right)^k \left(1-\frac{\mu}{N}\right)^{(N-k)}$$

ma $e^{-(N-k)} = e^{(-N+k)} = e^{-N}\, e^k$

quindi si puo' eliminare il fattore e^{-N}

inoltre anche $\sqrt{2\pi}$ si semplifica

$$= \frac{1}{k!} \frac{\sqrt{N}\; N^N}{\sqrt{(N-k)}\;\; (N-k)^{(N-k)} e^k} \left(\frac{\mu}{N}\right)^k \left(1-\frac{\mu}{N}\right)^{(N-k)}$$

ma $\left(\frac{\mu}{N}\right)^k = \mu^k N^{-k}$

$$=\frac{1}{k!}\frac{\sqrt{N}\ N^N}{\sqrt{(N-k)}\ (N-k)^{(N-k)}e^k}\mu^k N^{-k}(1-\frac{\mu}{N})^{(N-k)}$$

ma $N^N N^{-k}=N^{(N-k)}$

$$=\frac{\mu^k}{k!}\frac{\sqrt{N}\ N^{(N-k)}}{\sqrt{(N-k)}\ (N-k)^{(N-k)}e^k}(1-\frac{\mu}{N})^{(N-k)}$$

$$(N-k)^{(N-k)}=[N(1-\frac{k}{N})]^{(N-k)}$$

$$=\frac{\mu^k}{k!}\frac{\sqrt{N}\ N^{(N-k)}}{\sqrt{(N-k)}\ [N(1-\frac{k}{N})]^{(N-k)}e^k}(1-\frac{\mu}{N})^{(N-k)}$$

$$[N(1-\frac{k}{N})]^{(N-k)}=N^{(N-k)}[(1-\frac{k}{N})]^{(N-k)}$$

eliminando il fattore N^{N-k}

$$=\frac{\mu^k}{k!}\frac{\sqrt{N}}{\sqrt{(N-k)}\ [(1-\frac{k}{N})]^{(N-k)}e^k}(1-\frac{\mu}{N})^{(N-k)}$$

dato che $N\to\infty$ e'possibile trascurare k rispetto ad N, a k fissato vale a dire che :

$N-k\approx N$ per $N\gg k$ a k fisso

$$\approx\frac{\mu^k}{k!}\frac{1}{(1-\frac{k}{N})^N e^k}(1-\frac{\mu}{N})^N$$

$$\frac{\mu^k}{k!}\frac{1}{(1-\frac{k}{N})^N e^k}(1-\frac{\mu}{N})^N \approx \frac{\mu^k}{k!}\frac{1}{(1-\frac{k}{N})^N e^k}(1-\frac{\mu}{N})^N$$

$$per\ N \to \infty \qquad (1-\frac{k}{N})^N \to e^{-k} \qquad (1-\frac{\mu}{N})^N \to e^{-\mu}$$

$$P_N(k,p) \underset{per\ N \to \infty}{\approx} \frac{1}{k!}\frac{1}{e^{-k}e^k}\mu^k e^{-\mu} \to \frac{\mu^k}{k!}e^{-\mu}$$

$$\boxed{P(k,\mu) = \frac{\mu^k}{k!}e^{-\mu}}$$

distribuzione di **Poisson** .

quindi in presenza di esperimenti binomiali, se la probabilita' di successo diviene molto piccola, ossia se siamo in presenza di eventi rari, la distribuzione binomiale tende ad una distribuzione poissoniana

$$P_N(k,p) \underset{per\ N \to \infty}{\approx} P(k,\mu)$$

- **Verifica che la distribuzione sia correttamente normalizzata :**

la condizione di normalizzazione (secondo assioma di Kolmogorov) impone che

$$\sum_{\mathrm{k}=0}^{\infty} \mathrm{P}(k,\mu) = 1 \quad \text{ovvero} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu} = 1$$

e’ facile verificare che questa condizione e’ rispettata.

infatti : $$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu} = e^{-\mu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu^k}{k!} = e^{-\mu} e^{\mu} = 1$$

- **Verifica che μ sia effettivamente il valor medio della variabile k :**

per ottenere il valor medio $<k>$ di una variabile aleatoria k che abbia una distribuzione di probabilita' $P(k)$ propriamente normalizzata occorre calcolare :

$$\langle k \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} kP(k)$$

se la distribuzione di probabilita' e' la distribuzione di Poisson

$$\Rightarrow \; P(k) = P(k,\mu) = \frac{\mu^k}{k!}e^{-\mu}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}$$

raccogliendo $e^{-\mu}$ a fattor comune

$$= e^{-\mu} \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\mu^k}{k!}$$

ma $\sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\mu^k}{k!} = 0 + \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\mu^k}{k!}$

quindi $\sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\mu^k}{k!} \equiv \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\mu^k}{k!}$

$$\langle k \rangle = e^{-\mu} \sum_{\underline{k=1}}^{\infty} k \frac{\mu^k}{k!}$$

ricordiamo che : $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu^k}{k!} = e^{\mu}$

eseguendo la stessa operazione ad ambo i membri di una identita' riotterremo un identita' → derivando membro a membro rispetto a μ la $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mu^k}{k!}= e^{\mu}$ otterremo:

derivata del primo membro

$$\frac{d}{d\mu}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mu^k}{k!}\right)\equiv\sum_{k=0}^{\infty}\frac{d}{d\mu}\left(\frac{\mu^k}{k!}\right)=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}k\,\frac{\mu^{k-1}}{k!}=\frac{\mu}{\mu}\sum_{k=0}^{\infty}k\,\frac{\mu^{k-1}}{k!}=$$

$$=\frac{1}{\mu}\sum_{k=0}^{\infty}k\,\frac{\mu^k}{k!}$$

derivata del secondo membro

$$\frac{d}{d\mu}(e^{\mu})=e^{\mu}$$

ma $\frac{1}{\mu}\sum_{k=0}^{\infty}k\,\frac{\mu^k}{k!}\equiv\frac{1}{\mu}\sum_{\underline{k=1}}^{\infty}k\,\frac{\mu^k}{k!}$

$$\frac{1}{\mu}\sum_{k=1}^{\infty}k\,\frac{\mu^k}{k!}= e^{\mu}\quad\Rightarrow\quad\sum_{k=1}^{\infty}k\,\frac{\mu^k}{k!}= \mu e^{\mu}$$

quindi : $$< k > = e^{-\mu} \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\mu^k}{k!} = e^{-\mu} \mu e^{\mu} = \mu$$

in conclusione: $$\langle k \rangle = \mu$$

• **Calcolo della varianza della poissoniana:**

per definizione la varianza di una variabile aleatoria che distribuzione di probabilita' $P(k,\mu)$ distribuzione e' data dalla relazione:

$$Var(k) = \left\langle (k - \langle k \rangle)^2 \right\rangle = \left\langle k^2 \right\rangle - \langle k \rangle^2$$

per calcolare il valor medio dei quadrati della v.a. k di Poisson

$$\left\langle k^2 \right\rangle = \sum_{\mathrm{k}=0}^{\infty} k^2 P(k,\mu) \quad \text{ovvero} \quad \left\langle k^2 \right\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}$$

partendo da $\quad e^{\mu} = \dfrac{1}{\mu} \sum_{k=1}^{\infty} k \dfrac{\mu^k}{k!}$

e derivando membro a membro , con un calcolo simile al precedente si ottiene :

$$e^{\mu} = \frac{1}{\mu^2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} k^2 \frac{\mu^k}{k!} - \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\mu^k}{k!} \right)$$

quindi : $\langle k^2 \rangle = \mu^2 + \mu$ e dato che : $Var(k) = \langle k^2 \rangle - \langle k \rangle^2$

$$Var(k) = \sigma^2 = \mu$$

caratteristica peculiare della distribuzione di Poisson e' che ha varianza uguale al valor medio

ne consegue : $$\frac{\sigma}{\mu} = \frac{\sqrt{\mu}}{\mu} = \frac{1}{\sqrt{\mu}}$$

ricordando che $\mu = Np$ $$\frac{\sigma}{\mu} = \propto \frac{1}{\sqrt{N}}$$

• **Comportamento asintotico della variabile aleatoria poissoniana:**

la distribuzione poissoniana e’ fortemente asimmetrica attorno al suo valor medio μ.

tuttavia al crescere di μ la distribuzione diviene via via piu’ simmetrica attorno al valor medio.

al limite per grandi valori di μ l’andamento e’ ben riprodotto da una gaussiana.

percio’ si dice che la poisssoniana tende asintoticamente ad una gaussiana.

<u>Attenzione</u>: la gaussiana e’ una variabile aleatoria continua, mentre la poissoniana e’ una variabile aleatoria discreta !

la distribuzione di Poisson ha in realta' una origine piu' profonda :
si presenta ogni volta che ci si trova a dover descrivere situazioni in cui occorre prevedere quanti “accadimenti rari” avvengono in intervalli di tempo o di spazio
Si dimostra che se sono validi i cosiddetti ”postulati di Poisson”, il processo in corso e' descrivibile in termini di variabile di Poisson.

i postulati sono che:

- la probabilita' che avvenga un evento in un intervallo piccolo temporale Δt (o spaziale Δs), sia proporzionale all'intervallo stesso, ossia:
  $Prob\{$ 1 evento nell'intervallo Δt (o Δs) $\} = \lambda\,\Delta t$ (o $\lambda\,\Delta s$) con λ costante

- la probabilita' di due o piu' eventi nell'intervallo sia molto piccola (sia un infinitesimo di ordine superiore) rispetto alla probabilita' che ne avvenga uno solo

- eventi che avvengono in intervalli disgiunti siano indipendenti.

- la struttura del fenomeno sia invariante nel tempo (o nello spazio) tipici esempi di eventi di questo tipo sono :

- il numero di disintegrazioni di una sostanza radioattiva in un determinato intervallo di tempo (l'intervallo di tempo deve essere molto minore della vita media di modo che la quantita' di preparato radioattivo non vari apprezzabilmente durante le misure (postulato di stazionarieta')

- il numero di guasti che avvengono in un dispositivo composito, a patto che ogni volta che avviene un guasto il sistema venga riparato e ripristinato nella condizione iniziale (postulato di stazionarieta')

- il numero di nascite (o morti) in un dato intervallo di tempo in una popolazione stazionaria nel tempo (es. statistica dei morti da calcio di cavallo nell'esercito Prussiano, situazione da cui e' partito Poisson per determinare la distribuzione probabilistica