Derivata temporale di un vettore unitario (versore)

la derivata e' per definizione il limite del rapporto incrementale, quindi per derivare una grandezza <u>vettoriale</u>

rispetto al tempo occorrera' calcolare il limite per $\Delta t \to 0$ della differenza tra due vettori

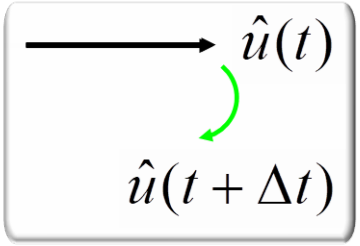
nel caso di un generico versore $\hat{u}(t)$

$$\frac{d\hat{u}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \hat{u}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\hat{u}(t+\Delta t) - \hat{u}(t)}{\Delta t}$$

Attenzione: anche se il ***modulo*** di un versore rimane costante al trascorrere del tempo il versore puo' ugualmente

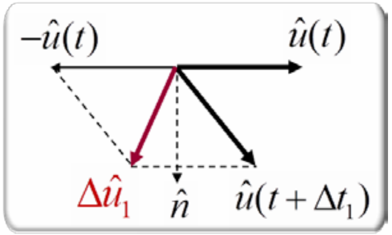
cambiare perche' ne variano la ***direzione*** ed il ***verso***

se il versore $\hat{u}(t)$ sta ruotando in senso <u>orario</u>



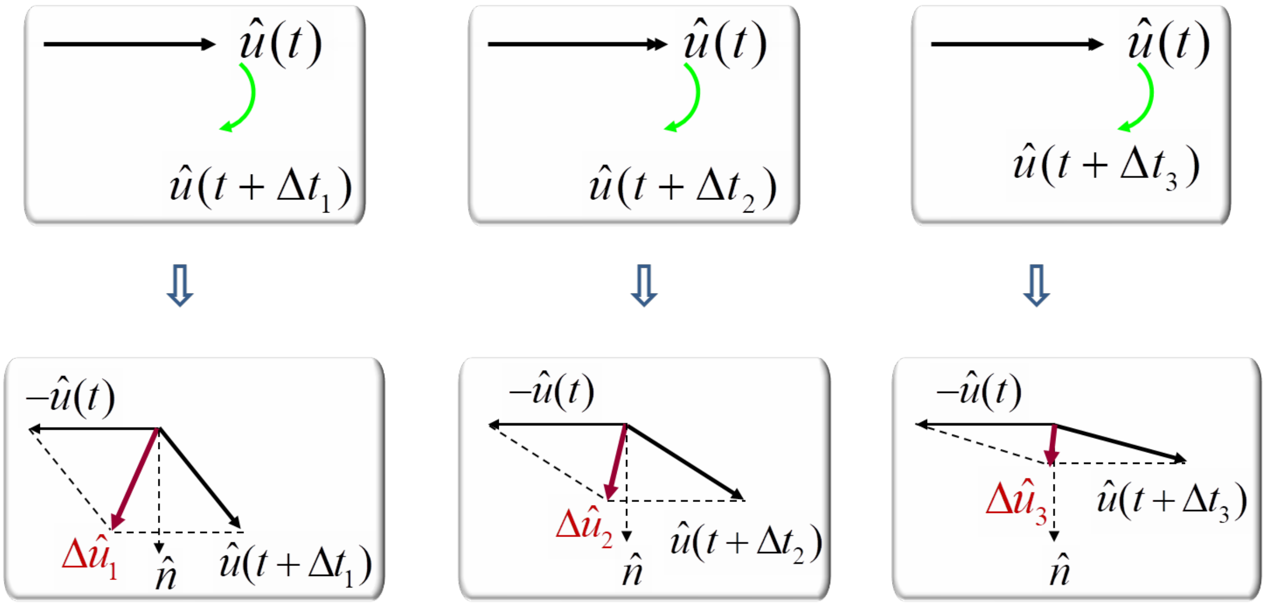
$$\Delta \hat{u} = \hat{u}(t+\Delta t) - \hat{u}(t) = \hat{u}(t+\Delta t) + (-\hat{u}(t))$$

graficamente:



dove $\hat{n} \perp \hat{u}(t)$

se la velocita' di rotazione non e' infinita al tendere a zero di Δt si avra' :



$$\Delta t_3 < \Delta t_2 < \Delta t_1$$

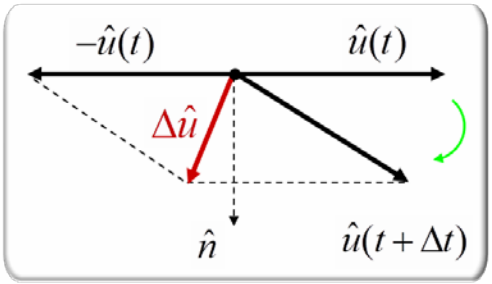
via via che $\Delta t \to 0$ $\Delta\hat{u}$ diverra' perpendicolare alla direzione del

versore originale $\hat{u}(t)$ ossia sara' orientato nella direzione del versore $\hat{n}(t)$

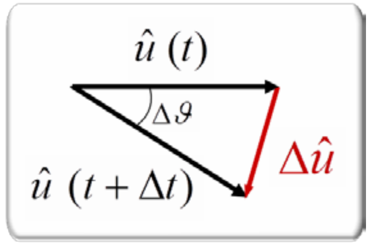
dove $\hat{n}(t)$ e' il versore **perpendicolare** ad $\hat{u}(t)$ al tempo t

cio' e' ricavabile anche utilizzando il prodotto scalare *(vedi dimostrazione in aula)*

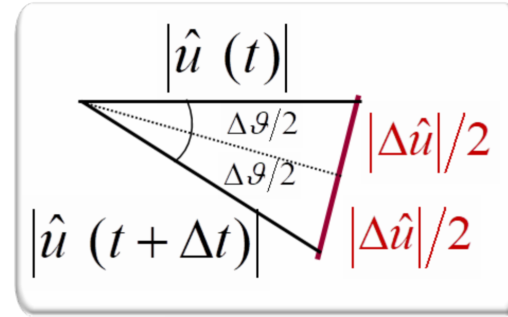
modulo del vettore derivata del versore $\hat{u}\ (t)$



⇨



considerando solo i moduli ⇨



$$\frac{|\Delta\hat{u}|}{2} = |\hat{u}(t)|\sin\frac{\Delta\vartheta}{2} = (1)\ \sin\frac{\Delta\vartheta}{2} = \sin\frac{\Delta\vartheta}{2}$$ per cui $$|\Delta\hat{u}| = 2\sin\frac{\Delta\vartheta}{2}$$

$$\frac{|\Delta\hat{u}|}{\Delta t} = \frac{|\Delta\hat{u}|}{\Delta\vartheta}\frac{\Delta\vartheta}{\Delta t} = \left(\frac{2\sin\frac{\Delta\vartheta}{2}}{\Delta\vartheta}\right)\left(\frac{\Delta\vartheta}{\Delta t}\right) = \left(\frac{\sin\frac{\Delta\vartheta}{2}}{\frac{\Delta\vartheta}{2}}\right)\left(\frac{\Delta\vartheta}{\Delta t}\right)$$

passare al limite per $\Delta t \to 0$ implica anche passare al limite per $\Delta\theta \to 0$ quindi anche $\Delta\theta/2 \to 0$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta\hat{u}|}{\Delta t} = \lim_{\substack{\Delta t\to 0\\ \frac{\Delta\vartheta}{2}\to 0}}\frac{\sin\frac{\Delta\vartheta}{2}}{\frac{\Delta\vartheta}{2}}\frac{\Delta\vartheta}{\Delta t} = (1)\ \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{d\vartheta}{dt}$$

dunque

- il **modulo** della derivata di un versore e' dato da $\left|\frac{d\hat{u}}{dt}\right| = \frac{d\vartheta}{dt}$
- la **direzione** della derivata del versore e' nella direzione perpendicolare al versore stesso
- il **verso** della derivata del versore e' determinato dal senso di rotazione del versore stesso

in conclusione : $\frac{d\hat{u}}{dt} = \frac{d\vartheta}{dt}\hat{n}$

Nota Bene :

la derivata del versore e' un vettore che va applicato all'origine del versore $\hat{u}$ al tempo t

Derivata di un vettore

un generico vettore $\vec{r}(t)$ di modulo, direzione e verso variabili nel tempo

puo'essere sempre scritto in termini del suo modulo $r(t)$ e del suo versore unitario $\hat{u}_r(t)$

⇨ $\vec{r}(t) = r(t)\hat{u}_r(t)$ o per semplicita' di notazione $\vec{r} = r\hat{u}_r$

se $\vec{r} = r\hat{u}_r$ ⇨ $\dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dfrac{d(r\hat{u}_r)}{dt} = \dfrac{dr}{dt}\hat{u}_r + r\dfrac{d\hat{u}_r}{dt} = \dfrac{dr}{dt}\hat{u}_r + r\dfrac{d\vartheta}{dt}\hat{n}$

⇨ $$\boxed{\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{u}_r + r\frac{d\vartheta}{dt}\hat{n}}$$

Integrale di un vettore

l'operazione di integrazione vettoriale e' definita in termini delle componenti del vettore espresse, per esempio, in un sistema cartesiano

esempio : l'impulso di una forza $$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)dt \qquad \vec{F} = F_x(t)\hat{i} + F_y(t)\hat{j} + F_z(t)\hat{k}$$

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} (F_x(t)\hat{i} + F_y(t)\hat{j} + F_z(t)\hat{k})dt = \hat{i}\int_{t_1}^{t_2} F_x(t)dt + \hat{j}\int_{t_1}^{t_2} F_y(t)dt + \hat{k}\int_{t_1}^{t_2} F_z(t)dt$$

$$I_x = \int_{t_1}^{t_2} F_x(t)dt \qquad I_y = \int_{t_1}^{t_2} F_y(t)dt \qquad I_z = \int_{t_1}^{t_2} F_z(t)dt$$

l'impulso totale sara' $$\vec{I} = I_x\hat{i} + I_y\hat{j} + I_z\hat{k}$$

Backup Slides