Esercizio

un punto materiale P si muove di moto armonico semplice lungo l'asse x

con pulsazione $\omega = 1\ rad\ sec^{-1}$

Scrivere l'equazione del moto sapendo che le condizioni iniziali sono espresse

dalle relazioni $x(t=0) = x_0 = 1\ m$ e $\mathrm{v}_x(t=0) = \mathrm{v}_0 = 2\ ms^{-1}$

a) quante cifre significative usare ?

b) in quale unita' di misura esprimere il risultato ?

c) occorre fare conversioni di unita' di misura ?

d) qual'e' il contesto fisico del problema ?

e) qual'e' la formula risolutiva ? Oppure: qual'e' la procedura da seguire per determinarla ?

f) quante sono le incognite ?

g) quante sono le condizioni al contorno <u>indipendenti</u> fornite ? Sono sufficienti per risolvere univocamente il problema ?

tralasciamo le prime tre domande di cui abbiamo gia' ampiamente discusso

a) quante cifre significative usare ?

b) in quale unita' di misura esprimere il risultato ?

c) occorre fare conversioni di unita' di misura ?

d) qual'e' il contesto fisico del problema ?

e) qual'e' la formula risolutiva ? Oppure: qual'e' la procedura da seguire per determinarla ?

f) quante sono le incognite ?

g) quante sono le condizioni al contorno fornite ? Sono sufficienti per risolvere univocamente il problema ?

in questo esercizio e' chiaro che la risposta alla domanda *d)* e'

→ e' un problema di cinematica

la risposta alla domanda *e)* e'

→ la soluzione e' semplicemente l'equazione oraria di un moto armonico unidimensionale che sappiamo essere una funzione armonica, ossia una funzione sinusoidale o cosinusoidale del tipo

$$\vec{x}(t) = A cos(\omega t)\hat{i} \quad \text{oppure} \quad \vec{x}(t) = A sen(\omega t)\hat{i}$$

attenzione: non sappiamo quale delle due funzioni si debba usare

ma sappiamo che possiamo passare da un andamento cosinusoidale

ad uno sinusoidale aggiungendo un opportuno angolo θ_0 detto " *fase iniziale*"

percio' ipotizzeremo che la soluzione sia del tipo

$$\vec{x}(t) = Acos(\omega t + \vartheta_0)\hat{i}$$

dove la fase iniziale θ_0 e' una incognita da determinare

quindi la risposta alla domanda $f)$ e'

le incognite sono due : l'ampiezza A e la fase iniziale θ_0

infine la risposta alla domanda $g)$ e' che le condizioni al contorno <u>indipendenti</u>

sono due : $x_0 = 1\ m$ e $v_0 = 2\ ms^{-1}$

dunque le informazioni dovrebbero essere sufficienti a risolvere univocamente il problema

$\vec{x}(t) = A\cos(\omega t + \vartheta_0)\hat{i}$ e derivando rispetto al tempo la $x(t)$

si ha $\vec{\mathrm{v}}(t) = -\omega A sen(\omega t + \vartheta_0)\hat{i}$

avendo a che fare con un problema unidimensionale possiamo abbandonare

la notazione vettoriale e scrivere semplicemente che $x(t) = A\cos(\omega t + \vartheta_0)$

e $\mathrm{v}(t) = -\omega A sen(\omega t + \vartheta_0)$ ma dobbiamo tenere traccia del segno

e lo faremo adottando la convenzione che se il moto e' nel verso:

- **concorde** all'orientamento dell'asse x → spostamento positivo $\Delta x > 0$
- **contrario** all'orientamento dell'asse x → spostamento negativo $\Delta x < 0$

imponendo le condizioni iniziali :

$$x_0 = A\cos(\vartheta_0) \quad \text{e} \quad \mathrm{v}_0 = -\omega A sen(\vartheta_0)$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

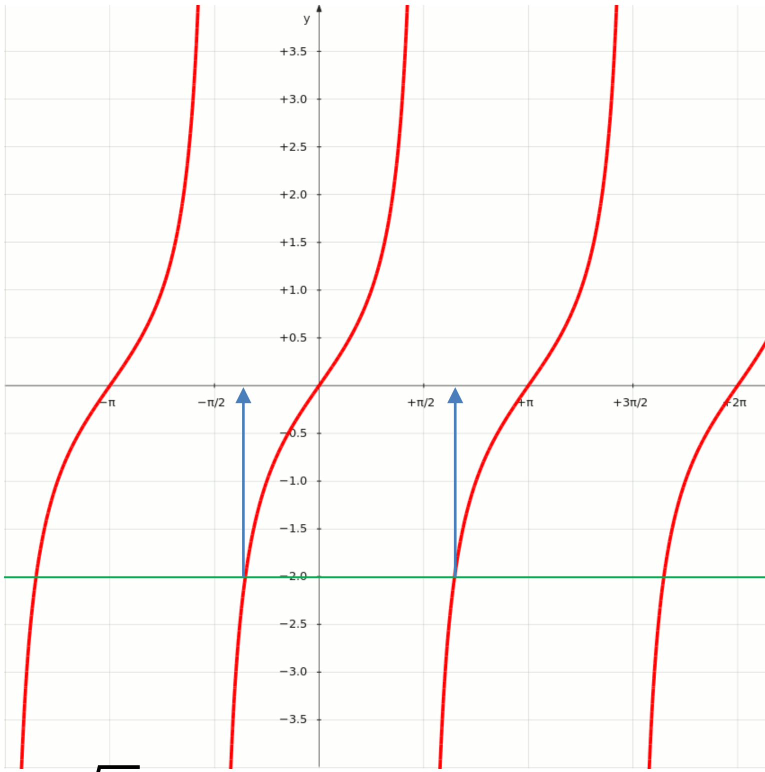
$$\cos(\vartheta_0) = \frac{x_0}{A} \qquad\qquad sen(\vartheta_0) = -\frac{\mathrm{v}_0}{\omega A}$$

dividendo membro a membro $tg(\vartheta_0) = -\dfrac{\mathrm{v}_0}{x_0 \omega}$

quadrando e sommando $\dfrac{x_0^2}{A^2} + \dfrac{\mathrm{v}_0^2}{\omega^2 A^2} = 1 \Rightarrow A = \pm\sqrt{x_0^2 + \dfrac{\mathrm{v}_0^2}{\omega^2}}$

imponendo le condizioni al contorno $x_0 = 1 \quad v_0 = 2 \quad$ e $\omega = 1$

$\Rightarrow \quad tg(\vartheta_0) = -2 \quad$ e $\quad A = \pm\sqrt{5} \quad$ per cui



$\theta_0 = -1.107$ rad $\quad$ oppure $\quad \theta_0 = 2.034$ rad

$A = +\,2.23$ m $\quad$ oppure $\quad A = -\,2.23$ m

<u>Attenzione</u>: A e' l'ampiezza del moto e puo' essere positiva o nulla , ma mai negativa quindi bisogna scartare la soluzione $\quad A = -\sqrt{5}$

matematica → $\quad A = \pm\sqrt{5} \qquad$ *fisica* → $A = +\sqrt{5}$

dunque le possibili soluzioni sono :

1) $\; x(t) = +2.23\cos(\omega t - 1.107)$

2) $\; x(t) = +2.23\cos(\omega t + 2.034)$

chiaramente abbiamo bisogno di un'altra informazione indipendente

come procurarcela ?

si e' gia' usata la $cos^2(\vartheta) + sen^2(\vartheta) = 1$ per determinare l'ampiezza del moto

c'e' un altra relazione matematica o fisica che ci possa tornare utile ?

- non abbiamo sfruttato appieno le condizioni al contorno

infatti a $t = 0$ $x_0 = +1$ ma anche $x_0 = -1$ a $t = 0$

avrebbe potuto essere una possibile condizione iniziale

infatti le soluzioni ottenute sono in termini di funzioni armoniche,

funzioni che possono assumere sia valori positivi che negativi percio' il *segno* della x fornisce l'informazione che occorre per risolvere l'ambiguita' sulla fase iniziale infatti:

1) $$x(t) = 2.23\cos(\omega t - 1.107)$$

a $t = 0$ $\quad cos(-1.107) = +0.447 \quad \rightarrow \quad \mathbf{x_0 = +1}$ ✓

2) $$x(t) = 2.23\cos(\omega t + 2.034)$$

a $t = 0$ $\quad cos(2.034) = -0.447 \quad \rightarrow \quad \mathbf{x_0 = -1}$ X naturalmente per verificare quale delle due soluzioni sia accettabile

avremmo anche potuto sfruttare l' equazione oraria della velocita'

$$v(t) = -\omega A sen(\omega t + \vartheta_0)$$

$\theta_0 = -1.107$ rad oppure $\theta_0 = 2.034$ rad

$A = +2.23$ m

dunque le possibili soluzioni sono :

1) $v(t) = (-\omega)2.23 sen(\omega t - 1.107)$

2) $v(t) = (-\omega)2.23 sen(\omega t + 2.034)$

$\omega = 1\ rad\ sec^{-1}$

1) $\mathrm{v}(t) = -2.23sen(\omega t - 1.107)$

a $t = 0$ $sen(-1.107) = -0{,}894$ → $\mathrm{v}_0 = +2$ ✓

2) $\mathrm{v}(t) = -2.23sen(\omega t + 2.034)$

a $t = 0$ $sen(2.034) = 0{,}894$ → $\mathrm{v}_0 = -2$ X

in conclusione la soluzione e' :

$$A = 2.23\ m \qquad \textbf{e} \qquad \vartheta_0 = 1.107\ rad$$

Backup slides