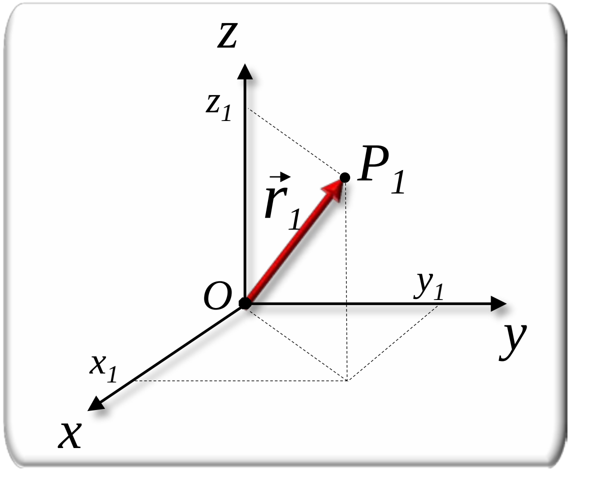
Moto in piu' dimensioni

nel caso di moti nel piano o in tre dimensioni per individuare in modo univoco

la posizione di un qualunque generico punto P_1 nello spazio e' <u>indispensabile</u>

servirsi della trattazione ***vettoriale***



in coordinate cartesiane → *vettore posizione* $\vec{r}$

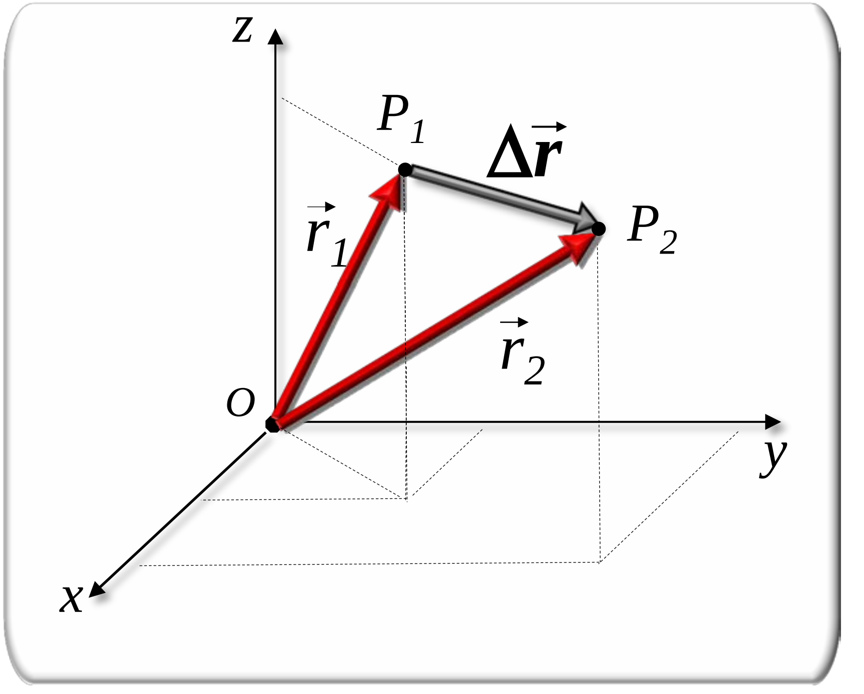
$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \quad \Rightarrow \quad r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{r} = |\vec{r}| = r\hat{u}_r \qquad \text{(o anche} \quad \vec{r} = r\hat{r} \quad)$$

r e' la distanza di P dall'origine O del sistema di riferimento

- per descrivere una variazione *finita* del vettore posizione nel tempo

si usa il *vettore spostamento* $\Delta\vec{r}$



$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1) = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

con $\boldsymbol{t_2 > t_1}$

Nota Bene : se al trascorrere del tempo

lo spostamento avviene da P_1 a P_2 il vettore spostamento $\Delta\vec{r}$

si applica in P_1 e punta verso P_2

ma nel moto in piu' dimensioni oltre a dover utilizzare grandezze vettoriali

diventa ***necessario*** anche abbandonare le grandezze medie e utilizzare

solo grandezze ***istantanee***

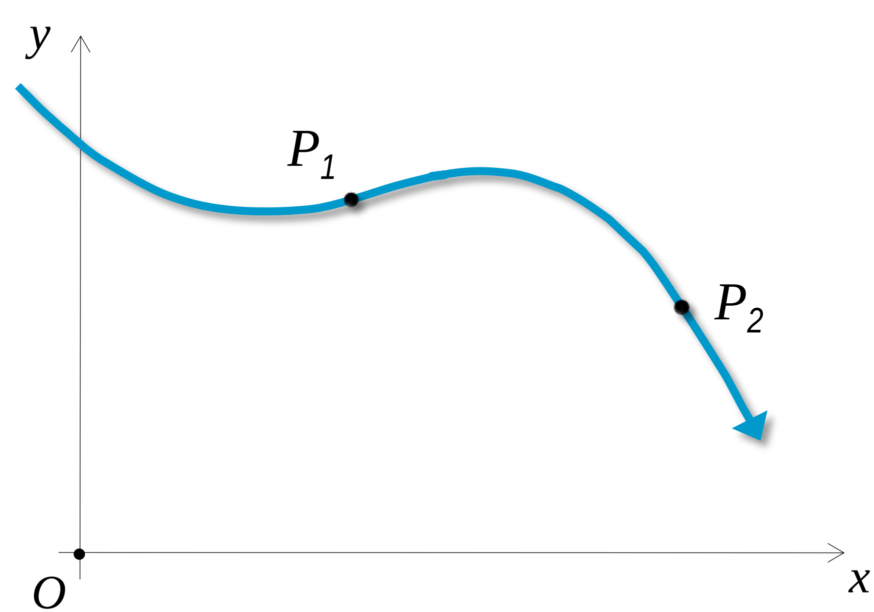
per capirne la motivazione consideriamo ad esempio un moto nel piano xy

in blu e' rappresentata la ***traiettoria***

di un generico moto di un punto materiale

P_1 = posizione al tempo $t = t_1$

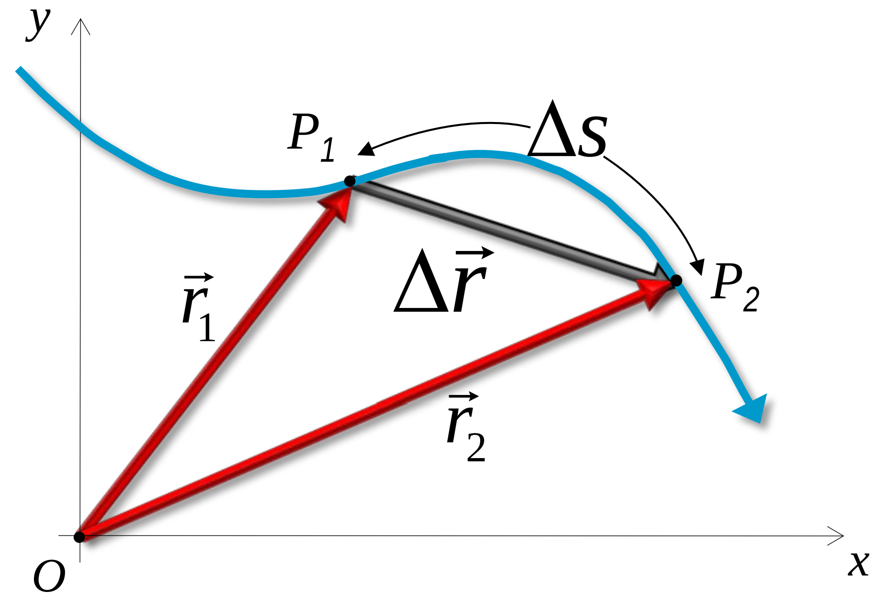
P_2 = posizione al tempo $t = t_2$



$\vec{r}_1$ = vettore posizione al tempo $t = t_1$

$\vec{r}_2$ = vettore posizione al tempo $t = t_2$

⇨ $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$



$\Delta s =$ spazio effettivamente percorso lungo la traiettoria mentre

$|\Delta\vec{r}| = \Delta r =$ lunghezza della ***corda*** sottesa dall'arco di lunghezza Δs

- e' evidente che $|\Delta\vec{r}| \neq \Delta s$ e questo significa che

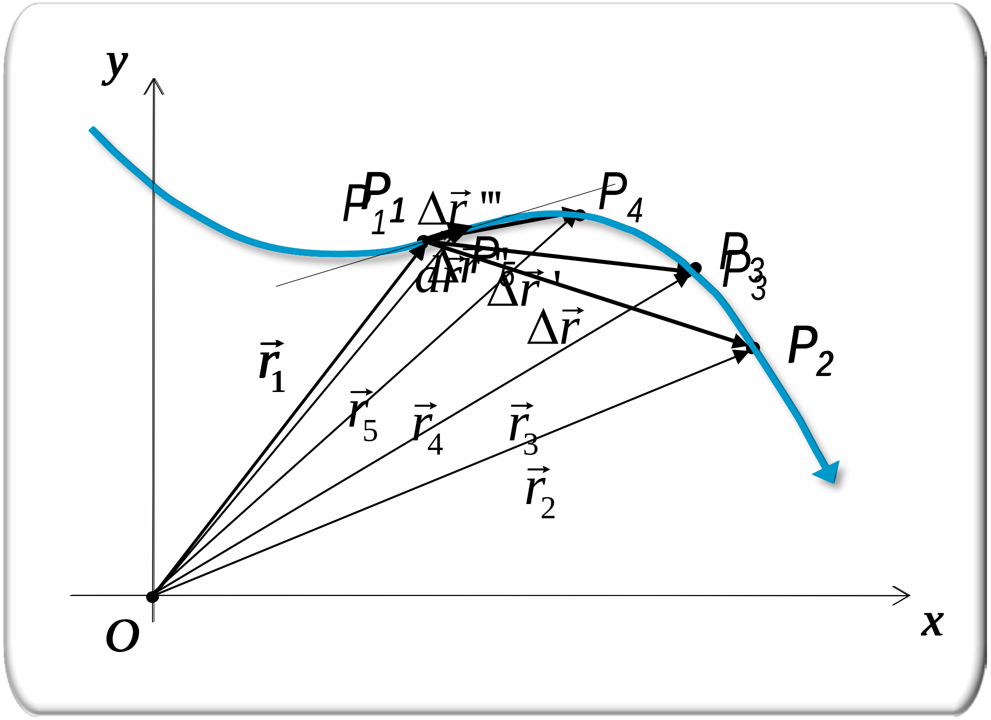
il modulo $|\Delta\vec{r}| = \Delta r$ del vettore $\Delta\vec{r}$ ***non*** fornisce lo spazio Δs

effettivamente percorso lungo la traiettoria del moto, ma se gli intervalli di tempo divenissero infinitesimi i punti lungo la traiettoria

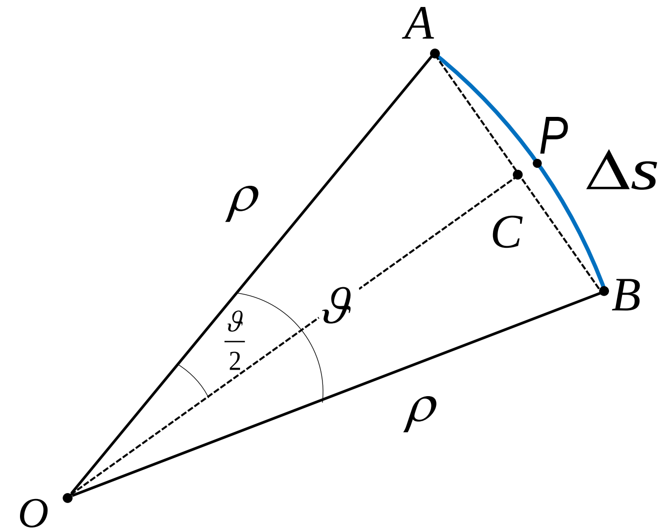
tenderebbero ad essere sempre piu' ravvicinati tra di loro

e, a patto che la velocita' sia finita, la corda tendera' a confondersi con l'arco

di conseguenza → per $\Delta t \to 0$ $\left|\Delta\vec{r}\right| \approx \Delta s$ ossia $\left|d\vec{r}\right| = ds$



in un cerchio di raggio ρ si ha $\Delta s = \rho\vartheta$



mentre $\left|\Delta\vec{r}\right| = AB = 2AC$

sviluppando in serie di Taylor la funzione sen θ

$$sen\vartheta = \vartheta - \frac{\vartheta^3}{3!} + \frac{\vartheta^5}{5!} + \frac{\vartheta^7}{7!} + ...$$

per angoli piccoli

ci si puo' arrestare al primo ordine ⇨ $sen\ \vartheta \approx \vartheta$ (θ in rad)

nel triangolo AOC si ha $AC = \rho sen\dfrac{\vartheta}{2}$ per cui

$$\lim_{\vartheta/2 \to 0} \rho sen\frac{\vartheta}{2} = \rho\frac{\vartheta}{2} \Rightarrow AB = 2AC = \rho\vartheta \equiv \Delta s$$

da cio’ si deduce che la lunghezza dell’arco infinitesimo deve uguagliare,

a meno di infinitesimi di ordine superiore, la lunghezza della corda che lo sottende

ovvero $$\lim_{\vartheta/2 \to 0} \left|\Delta\vec{r}\right| = \left|d\vec{r}\right| \approx ds$$

e poiche’ $$\vec{\mathrm{v}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$ e’ chiaro che $$\left|\vec{\mathrm{v}}\right| = \frac{ds}{dt}$$

- per descrivere una variazione *infinitesima* del vettore posizione nel tempo

si deve usare il *vettore spostamento infinitesimo*

$$d\vec{r} = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta \vec{r}$$

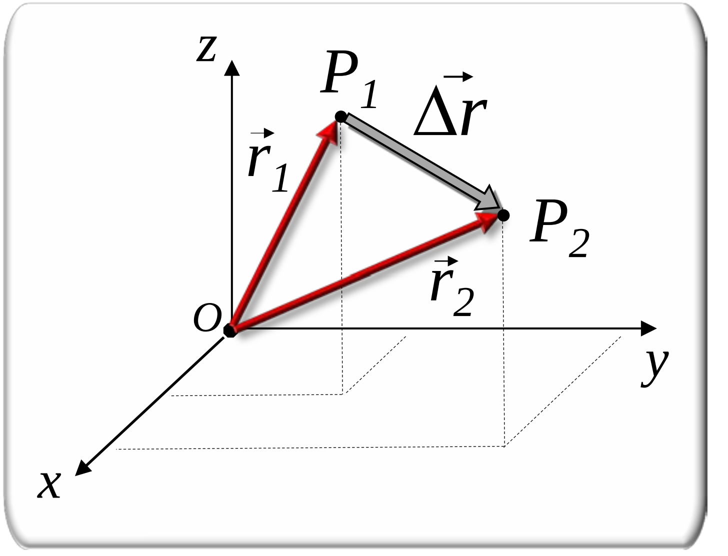
perche' per il vettore $d\vec{r}$ si ha

$$\left| d\vec{r} \right| = ds$$

Velocita' vettoriale istantanea

- il vettore *velocita' istantanea*

  e' definito come



$$\vec{\mathrm{v}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

→ <u>attenzione</u>: si tratta della derivata temporale di una grandezze <u>vettoriale</u>

Modulo del vettore velocita' istantanea $\vec{\mathrm{v}}$

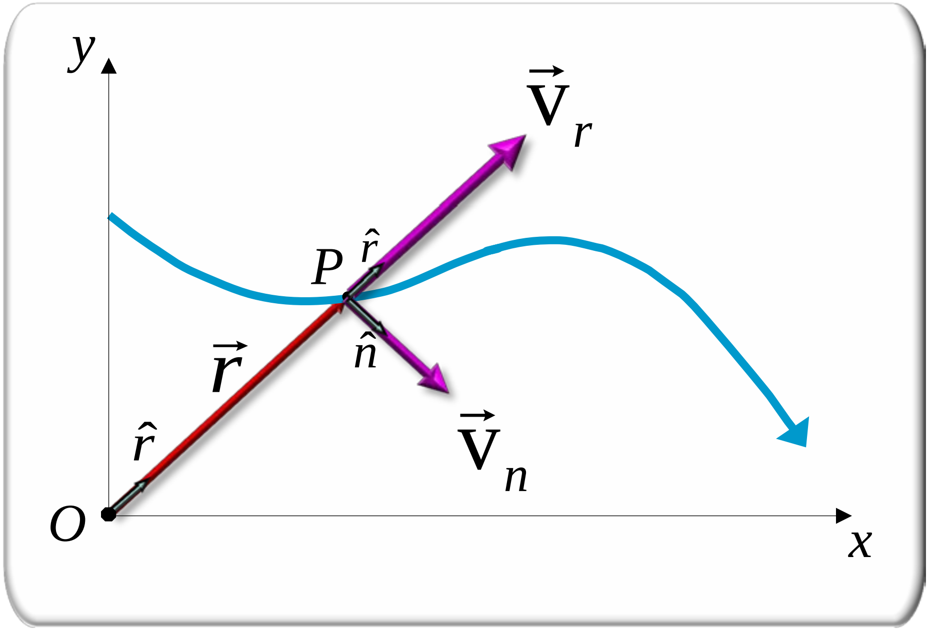
poiche' $\vec{\mathrm{v}} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$ e $\left|d\vec{r}\right| = ds$ ⇨ $\left|\vec{\mathrm{v}}\right| = \dfrac{ds}{dt}$

Direzione e verso del vettore velocita' istantanea

$\vec{\mathrm{v}} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$ e $\vec{r} = r\hat{r}$

⇨ $\vec{\mathrm{v}} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dfrac{dr}{dt}\hat{r} + r\dfrac{d\vartheta}{dt}\hat{n}$ dove $\hat{n} \perp \hat{r}$

quindi in un qualunque punto P della traiettoria il vettore $\vec{v}$ avra'



un componente $\vec{v}_r = \dfrac{dr}{dt}\hat{r}$ concorde alla direzione originale di $\vec{r}$

(orientato nella direzione di $\hat{r}$) e l' altro componente $\vec{v}_n = r\dfrac{d\vartheta}{dt}\hat{n}$

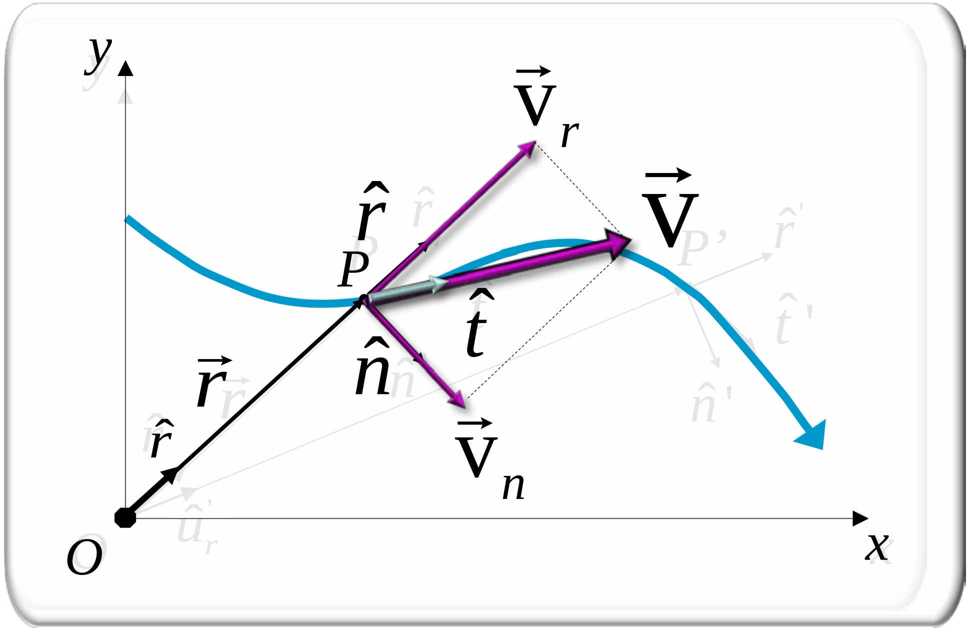
sara' orientato perpendicolarmente a $\hat{r}$

per determinare la direzione ed il verso di $\vec{v}$ occorrera' sommare tra loro

- vettorialmente - queste due componenti in ogni punto della traiettoria

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt}\hat{r} + r\frac{d\vartheta}{dt}\hat{n} = |\vec{v}|\ \hat{t}$$

dove $\hat{t}$ e' il versore che indica la direzione e il verso delle velocita'



cosa , a prima vista, piuttosto complicata da farsi perche' i versori $\hat{r}$ ed $\hat{n}$

non mantengono fisse nel tempo le loro posizioni ed il loro orientamento

- ma si puo' dimostrare che la direzione di $\vec{\mathrm{v}}$ (individuata dal versore $\hat{t}$) risulta sempre ***tangente*** alla traiettoria

dunque si ha sempre $$\vec{\mathrm{v}} = \frac{ds}{dt}\hat{t}$$

o anche $\vec{\mathrm{v}} = \mathrm{v}\hat{t}$ dove $\mathrm{v} = \left|\vec{\mathrm{v}}\right| = \dfrac{ds}{dt}$

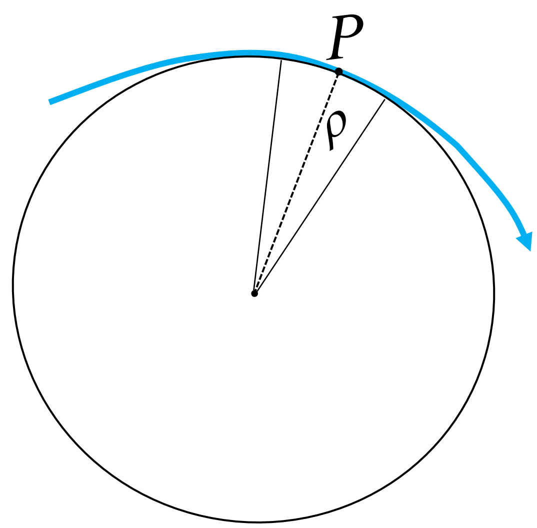
per capirlo si puo’ fare riferimento alle caratteristiche

stesse del vettore spostamento infinitesimo $d\vec{r}$

oppure si puo' fare riferimento al "cerchio osculatore"

- data una qualsiasi linea curva nello spazio il *cerchio osculatore*

  alla curva in un suo punto P è il cerchio *tangente* alla curva in quel punto



il cerchio osculatore approssima la curvatura della curva in un intorno infinitesimo

del punto P quindi costituisce una approssimazione migliore alla curva in P

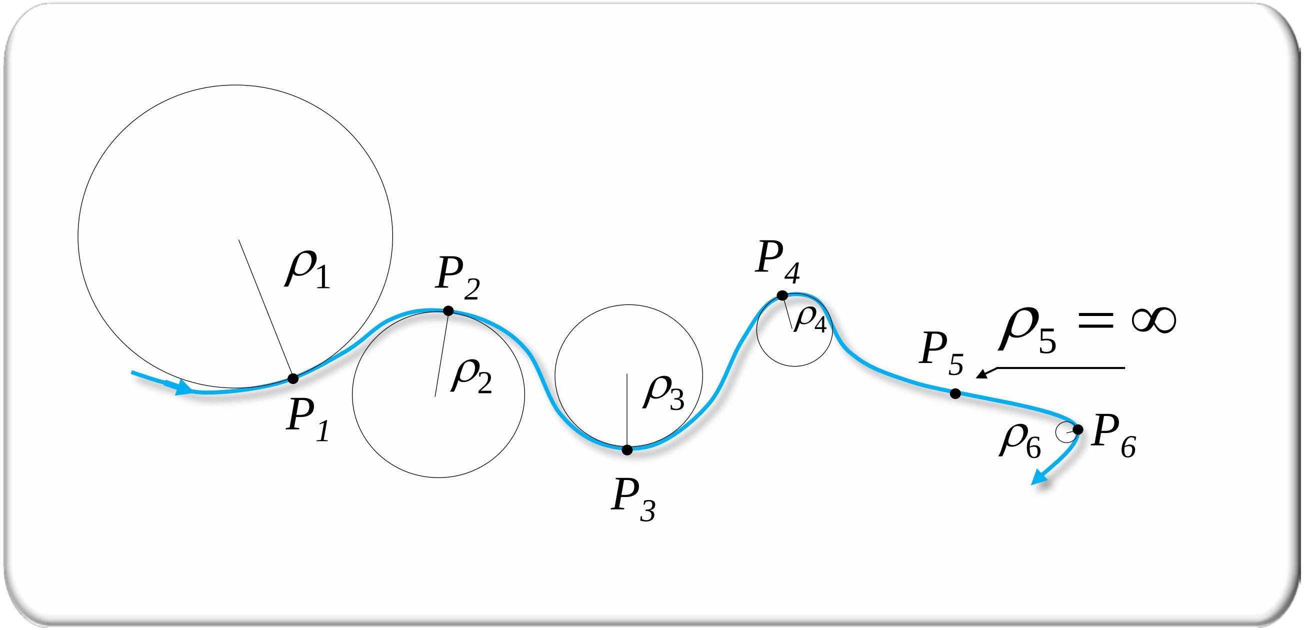
di quella fornita dalla retta tangente alla curva in P

(approssimazione del secondo ordine)

una qualsiasi curva puo' essere pensata come se fosse costituita

da una infinita successione di archi di circonferenza infinitesimi

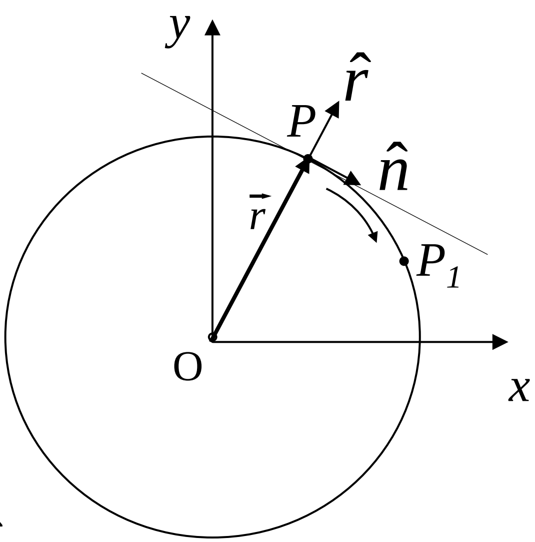
di raggio, punto per punto, pari al raggio ρ del cerchio osculatore in quel punto



il raggio ρ del cerchio osculatore diviene infinito se la linea è una retta

e viceversa tende a zero all'aumentare della curvatura della linea

Traiettoria corcolare



$\vec{r} = r\hat{r}$ e' il vettore spiccato dal

centro della circonferenza verso il generico punto P

$$\Rightarrow \quad \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{r} + r\frac{d\vartheta}{dt}\hat{n} \qquad \text{con} \qquad \hat{n} \perp \hat{r}$$

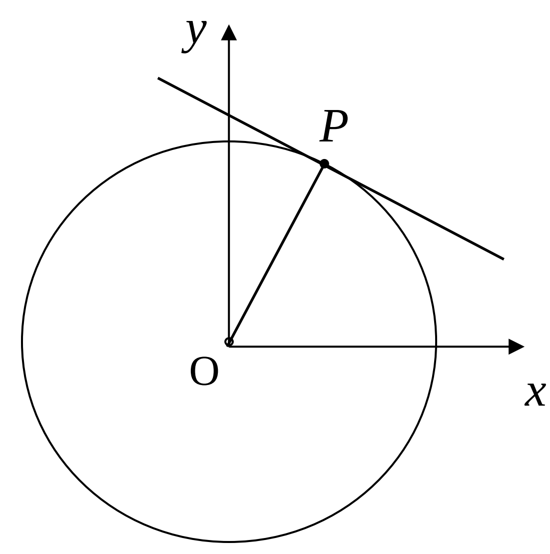
ma essendo la traiettoria ***circolare*** $\quad |\vec{r}| = r = cost$

quindi $\dfrac{dr}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{d\vec{r}}{dt} = r\dfrac{d\vartheta}{dt}\hat{n}$

ma in un qualsiasi cerchio il raggio che congiunge il centro del cerchio

ad un qualunque punto P sulla circonferenza e’ sempre perpendicolare

alla retta tangente alla circonferenza in quel punto



ne consegue che in una traiettoria ***circolare***

$\hat{n}$ e’ sempre tangente alla traiettoria

⇨ lungo una qualsiasi traiettoria circolare il vettore velocita' istantanea

$$\frac{d\vec{r}}{dt}$$ e' tangente alla traiettoria

- ma dato che una qualsiasi curva puo' sempre essere approssimata localmente

  dal cerchio osculatore, il risultato ottenuto ha validita' generale

  qualunque sia la traiettoria nello spazio

Nota bene :

il fatto che il vettore velocita’ istantanea sia <u>sempre</u> tangente alla traiettoria

e’ una proprieta’ veramente utile perche’ se si conoscesse

l’espressione analitica della traiettoria basterebbe una operazione di derivazione

per calcolare la direzione della velocita’ istantanea ricapitolando :

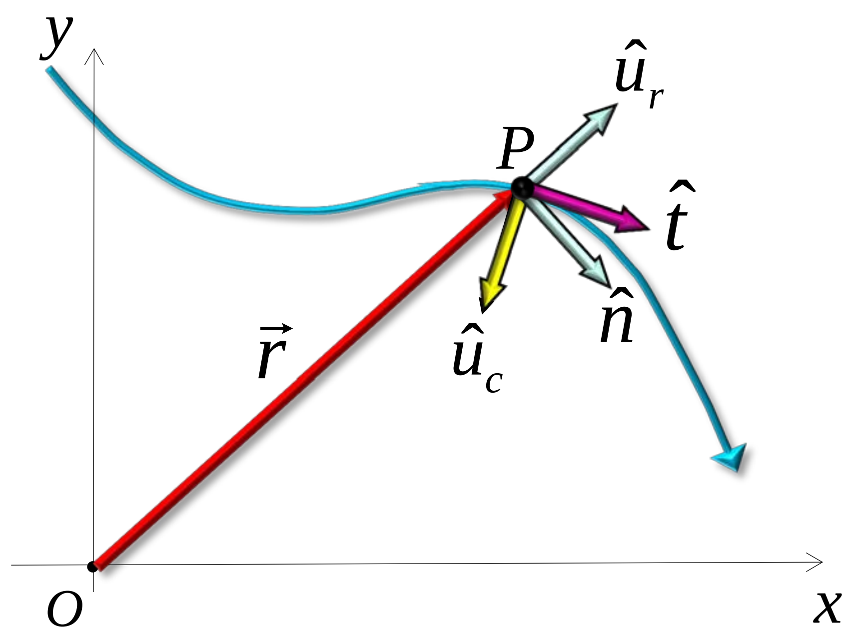
il vettore *velocita' vettoriale istantanea* e' definito come $\vec{\mathrm{v}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$

il modulo v del vettore $\vec{\mathrm{v}}$ fornisce la velocita' *lungo la traiettoria del moto*, ossia ds/dt

la direzione ed il verso di $\vec{\mathrm{v}}$ sono gli stessi di $\overrightarrow{dr}$ dunque $\vec{\mathrm{v}}$ e' sempre <u>tangente alla traiettoria</u>

in conclusione : $\vec{\mathrm{v}} = \frac{ds}{dt}\hat{t}$ o anche $\vec{\mathrm{v}} = \mathrm{v}\hat{t}$ dove $\mathrm{v} = \left|\vec{\mathrm{v}}\right| = \frac{ds}{dt}$

Accelerazione vettoriale istantanea



$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\mathrm{v}}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\mathrm{v}}}{dt}$$

dato che $\vec{\mathrm{v}} = \mathrm{v}\hat{t}$ si avra'

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\mathrm{v}}}{dt} = \frac{d\mathrm{v}}{dt}\hat{t} + \mathrm{v}\frac{d\vartheta}{dt}\hat{u}_c \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = a_t\,\hat{t} + a_c\,\hat{u}_c$$

dove $\hat{t}$ e' il versore tangente alla traiettoria

mentre $\hat{u}_c$ e' il versore perpendicolare a $\hat{t}$

- si definisce *accelerazione tangenziale* ($\vec{a}_t$) quel componente della accelerazione vettoriale istantanea che determina un cambio del modulo e potenzialmente anche del verso, ma non della **direzione** della velocita

- si definisce *accelerazione centripeta* ($\vec{a}_c$) quel componente della accelerazione vettoriale istantanea che determina un cambio della direzione, e potenzialmente anche del verso, ma non del **modulo** della velocita

Proprieta' del vettore accelerazione <u>tangenziale</u>

l' *accelerazione tangenziale* $\vec{a}_t = \frac{d\mathrm{v}}{dt}\hat{t}$ e' un vettore che ha

<u>-modulo</u> :

-pari alla variazione del modulo della velocita' $\frac{d\mathrm{v}}{dt}$ ⇨ $\frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right) = \frac{d^2 s}{dt^2}$

-*<u>direzione</u>* :

-sempre tangente alla traiettoria ossia sempre la stessa della velocita'

-*<u>verso</u>* : concorde alla velocita' se la variazione di velocita' e' positiva, ossia → moto accelerato; discorde alla velocita' se la variazione di velocita' e' negativa, → moto decelerato

rimangono ora da determinare verso e modulo della componente centripeta

Backup Slides