Esercizio

un punto materiale si muove con leggi orarie:

$$x(t) = \mathrm{v}_0 t \cos(\omega t) \qquad y(t) = \mathrm{v}_0 t \sin(\omega t) \qquad z(t) = 0$$

dove v_0 e ω sono due costanti positive

- determinare la velocita' e l'accelerazione del punto

- determinare l'espressione intrinseca della velocita' e dell'accelerazione

il fatto che $z(t) = 0$ implica che il moto si svolga nel piano xy

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + 0\hat{k} = \mathrm{v}_0 t\ cos(\omega t)\hat{i} + \mathrm{v}_0 t\ sen(\omega t)\hat{j}$$

derivando il vettore posizione rispetto al tempo si otterra' la velocita' del punto

e derivando la velocita' si otterra l'accelerazione:

$$\vec{\mathrm{v}} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\mathrm{v}_0 t\ cos(\omega t)\hat{i} + \mathrm{v}_0 t\ sin(\omega t)\,\hat{j}\right)$$

$$\downarrow$$

$$\frac{d}{dt}\left(\mathrm{v}_0 t\ cos(\omega t)\hat{i}\ \right) \quad + \quad \frac{d}{dt}\left(\mathrm{v}_0 t\ sin(\omega t)\,\hat{j}\right)$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\left(\frac{d}{dt}\left(\mathrm{v}_0 t\ cos(\omega t)\ \right)\right)\hat{i} + \left(\mathrm{v}_0 t\ cos(\omega t)\ \right)\frac{d\hat{i}}{dt}$$

$$\left(\frac{d}{dt}\left(\mathrm{v}_0 t\ sin(\omega t)\ \right)\right)\hat{j} + \left(\mathrm{v}_0 t\ sin(\omega t)\ \right)\frac{d\hat{j}}{dt}$$

ma i versori $\hat{i}$ e $\hat{j}$
sono fissi nel tempo
$\rightarrow$ $\frac{d\hat{i}}{dt} = 0$ e $\frac{d\hat{j}}{dt} = 0$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\frac{d}{dt}\left(\mathrm{v}_0 t\ cos(\omega t)\ \right) = \mathrm{v}_0 cos(\omega t) + \mathrm{v}_0 t\left(-sen(\omega t)\omega\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\mathrm{v}_0 t\ sin(\omega t)\ \right) = \mathrm{v}_0 sin(\omega t) + \mathrm{v}_0 \omega t\ cos(\omega t)$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\mathrm{v}_0 cos(\omega t) - \mathrm{v}_0 \omega t\ sen(\omega t) \qquad\qquad \mathrm{v}_0 sin(\omega t) + \mathrm{v}_0 \omega t\ cos(\omega t)$$

$$\downarrow$$

$$\vec{\mathrm{v}} = \left(\mathrm{v}_0 cos(\omega t)\ -\ \mathrm{v}_0 \omega t\ sen(\omega t)\right)\hat{i} + \left(\mathrm{v}_0 sin(\omega t)\ +\ \mathrm{v}_0 \omega t\ cos(\omega t)\right)\hat{j}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\mathrm{v}}}{dt} = \frac{d}{dt}\left\{ \left(\mathrm{v}_0 cos(\omega t) - \mathrm{v}_0 \omega t\ sen(\omega t)\right)\hat{i} \right.$$

$$\left. + \left(\mathrm{v}_0 sen(\omega t) + \mathrm{v}_0 \omega t\ cos(\omega t)\right)\hat{j} \right\}$$

$$\downarrow$$

$$-\mathrm{v}_0 \omega sen(\omega t)\hat{i} - \left(\mathrm{v}_0 \omega\ sen(\omega t) + \mathrm{v}_0 \omega^2 t\ cos(\omega t)\right)\hat{i}$$

$$+\mathrm{v}_0 \omega\ cos(\omega t)\hat{j} + \left(\mathrm{v}_0 \omega\ cos(\omega t) - \mathrm{v}_0 \omega^2 t\ sen(\omega t)\right)\hat{j}$$

$$\downarrow$$

$$\vec{a} = \left(-2\mathrm{v}_0 \omega sen(\omega t) - \mathrm{v}_0 \omega^2 t\ cos(\omega t)\right)\hat{i}$$

$$+ \left(2\mathrm{v}_0 \omega\ cos(\omega t) - \mathrm{v}_0 \omega^2 t\ sen(\omega t)\right)\hat{j}$$

per quanto riguarda la traiettoria quadrando $x(t)$ e $y(t)$

e sommandole assieme si ottiene

$$x^2(t) = \mathrm{v}_0^2 t^2 \; cos^2(\omega t) \qquad\qquad y^2(t) = \mathrm{v}_0^2 t^2 \; sin^2(\omega t)$$

$$x^2 + y^2 = \mathrm{v}_0^2 t^2 \; \left(cos^2(\omega t) + sin^2(\omega t) \right)$$

$$x^2 + y^2 = \mathrm{v}_0^2 t^2$$

→ la traiettoria del punto materiale e' una spirale nel piano xy con raggio crescente la descrizione del moto di un punto materiale in termini intrinseci

implica l'uso dell' ascissa curvilinea s di modo da passare dalla descrizione

in termini di leggi orarie alla descrizione parametrica

$$x = x(t) \qquad\qquad x = x(s)$$

equazioni parametriche della traiettoria

$$y = y(t) \quad \Rightarrow \quad y = y(s)$$

espresse in funzione del parametro s

$$z = z(t) \qquad\qquad z = z(s)$$

"intrinseco" alla traiettoria stessa

$$s = s(t)$$

equazione oraria

la velocita' e l'accelerazione possono essere scritte in modo intrinseco come :

$$\vec{\mathrm{v}} = \frac{ds}{dt}\hat{t} \qquad\qquad \vec{a} = \frac{d^2 s}{dt^2}\hat{t} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \hat{u}_c$$

dove s e' l' *ascissa curvilinea* che parametrizza la traiettoria in questione

$$s = s(t) = \int_0^t \sqrt{\left(x'(t')\right)^2 + \left(y'(t')\right)^2}\ dt'$$ o anche $$\int_0^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\ dt'$$

$$\vec{\mathrm{v}} = \ x'(t')\hat{i} + y'(t')\,\hat{j}$$ o anche $$\dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j}$$ e dato che

$$\vec{\mathrm{v}} = \ \left(\mathrm{v}_0 cos(\omega t)\ -\ \mathrm{v}_0 \omega t\ sen(\omega t)\right)\hat{i} + \ \left(\mathrm{v}_0 sin(\omega t)\ +\ \mathrm{v}_0 \omega t\ cos(\omega t)\right)\hat{j}$$

$$s(t) =$$

$$\int_0^t \sqrt{\left(\mathrm{v}_0 cos(\omega t')\ -\ \mathrm{v}_0 \omega t'\ sen(\omega t')\right)^2 + \left(\mathrm{v}_0 sin(\omega t')\ +\ \mathrm{v}_0 \omega t'\ cos(\omega t')\right)^2}\ dt'$$

$$= \int_0^t \sqrt{\mathrm{v}_0{}^2\ +\ \mathrm{v}_0{}^2 \omega^2 t'^2}\ \ dt'$$ quindi $$s(t) = \mathrm{v}_0\ \int_0^t \sqrt{1\ +\ \omega^2 t'^2}\ dt'$$

se $$s(t) = \mathrm{v}_0 \int_0^t \sqrt{1 + \omega^2 t'^2}\, dt'$$

dato che integrale e derivata sono operazioni inverse una dell'altra

$$\downarrow$$

$$\frac{ds}{dt} = \mathrm{v}_0 \sqrt{1 + \omega^2 t^2}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = \mathrm{v}_0 \frac{1}{2} \frac{2\omega^2 t}{\sqrt{1 + \omega^2 t^2}} = \mathrm{v}_0 \frac{\omega^2 t}{\sqrt{1 + \omega^2 t^2}}$$

$$\downarrow$$

$$\vec{\mathrm{v}} = \mathrm{v}_0 \sqrt{1 + \omega^2 t^2}\ \hat{t}$$

$$\vec{a} = \left(\mathrm{v}_0 \frac{\omega^2 t}{\sqrt{1 + \omega^2 t^2}} \right) \hat{t} + \frac{1}{\rho} \left(\mathrm{v}_0 \sqrt{1 + \omega^2 t^2} \right)^2\ \hat{u}_c$$

espressione intrinseca
della velocita' e dell'accelerazione

$$\vec{v} = v_0\sqrt{1 + \omega^2 t^2}\ \hat{t}$$

$$\vec{a} = \left(v_0 \frac{\omega^2 t}{\sqrt{1 + \omega^2 t^2}} \right)\ \hat{t} + \frac{1}{\rho}\left(v_0{}^2 (1 + \omega^2 t^2) \right)^2\ \hat{u}_c$$

espressione cartesiana
della velocita' e dell'accelerazione

$$\vec{v} = \left(v_0 cos(\omega t)\ -\ v_0 \omega t\ sen(\omega t) \right)\hat{i} + \left(v_0 sin(\omega t)\ +\ v_0 \omega t\ cos(\omega t) \right)\hat{j}$$

$$\vec{a} = \left(-2v_0 \omega sen(\omega t) - v_0 \omega^2 t\ cos(\omega t) \right)\hat{i} + \left(2v_0 \omega\ cos(\omega t) - v_0 \omega^2 t\ sen(\omega t) \right)\hat{j}$$

per il vettore $d\vec{r}$ si ha $|d\vec{r}| = ds$

quindi $$\frac{d\vec{r}}{|d\vec{r}|} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \hat{t}$$ ma si ha anche che $$\hat{t} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

percio' vi sono due modi equivalenti di determinare il versore tangente

prima maniera :

$$\hat{t} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{d\vec{r}}{dt}\frac{dt}{ds}$$ ma $$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$$

e $$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\frac{ds}{dt}} = \frac{1}{v_0\sqrt{1+\omega^2 t^2}}$$ $\Rightarrow$ $$\hat{t} = \frac{\vec{v}}{v_0\sqrt{1+\omega^2 t^2}}$$

$$\hat{t} = \frac{\left(\mathrm{v}_0 cos(\omega t) \; - \; \mathrm{v}_0 \omega t \;\; sen(\omega t)\right)\hat{i} + \left(\mathrm{v}_0 sin(\omega t) \; + \; \mathrm{v}_0 \omega t \;\; cos(\omega t)\right)\hat{j}}{\mathrm{v}_0 \sqrt{1 + \omega^2 t^2}}$$

ossia

$$\hat{t} = \frac{\left(cos(\omega t) - \omega t \;\; sen(\omega t)\right)\hat{i} + \left(sin(\omega t) + \omega t \;\; cos(\omega t)\right)\hat{j}}{\sqrt{1 + \omega^2 t^2}}$$

ovviamente si ottiene lo stesso risultato determinando il modulo di $\vec{\mathrm{v}}$

e utilizzando la $\hat{t} = \dfrac{\vec{\mathrm{v}}}{\left|\vec{\mathrm{v}}\right|}$

dalla definizione di derivata di un generico versore $\hat{u}$

$$\frac{d\hat{u}}{dt} = \frac{d\vartheta}{dt}\hat{n}$$

dove il versore $\hat{n}$ e' perpendicolare al versore $\hat{u}$

$\frac{d\hat{u}}{dt}$ e' un *vettore* e per determinare $\hat{n}$ bisognera' calcolare $\dfrac{\frac{d\hat{u}}{dt}}{\left|\frac{d\hat{u}}{dt}\right|}$

dunque $\frac{d\hat{t}}{dt} = \frac{d\vartheta}{dt}\hat{u}_c$ per cui $\hat{u}_c = \dfrac{\frac{d\hat{t}}{dt}}{\left|\frac{d\hat{t}}{dt}\right|}$

$$\frac{d\hat{t}}{dt} = \frac{d\vartheta}{dt}\hat{u}_c$$

esprimendo $\hat{t}$ in funzione di s

$$\frac{d\hat{t}}{dt} = \frac{d\hat{t}}{ds}\frac{ds}{dt}$$

$$\frac{d\vartheta}{dt}\hat{u}_c = \frac{d\hat{t}}{ds}\frac{ds}{dt}$$

$$\frac{d\vartheta}{dt}\hat{u}_c = \frac{d\hat{t}}{ds}\rho\frac{d\vartheta}{dt}$$

$$\hat{u}_c = \frac{d\hat{t}}{ds}\rho$$

$$\frac{d\hat{t}}{ds} = \frac{1}{\rho}\hat{u}_c \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{d\hat{t}}{ds}\right| = \frac{1}{\rho}$$

se ρ e' il raggio del cerchio osculatore

$$s = \rho\vartheta \quad \Rightarrow \quad \frac{ds}{dt} = \vartheta\frac{d\rho}{dt} + \rho\frac{d\vartheta}{dt}$$

lungo il tratto d'arco del cerchio osculatore che approssima localmente la traiettoria curva il raggio ρ e' costante quindi

$$\frac{d\rho}{dt} = 0 \quad \text{percio'} \quad \frac{ds}{dt} = \rho\frac{d\vartheta}{dt}$$

il modulo della derivata del versore tangente rispetto all'ascissa curvilinea fornisce il raggio di curvatura della traiettoria

Ricapitolando:

$$\hat{t} = \frac{d\vec{r}}{ds} \quad \text{o anche} \quad \hat{t} = \frac{\vec{\mathrm{v}}}{|\vec{\mathrm{v}}|}$$

$$\hat{u}_c = \frac{\frac{d\hat{t}}{dt}}{\left|\frac{d\hat{t}}{dt}\right|} \qquad \hat{b} = \hat{t} \times \hat{u}_c$$

$$\left|\frac{d\hat{t}}{ds}\right| = \frac{1}{\rho}$$

se la curva fosse fornita nella forma $f(x,y) = 0$ il versore $\hat{u}_c$, a meno del segno,

sarebbe determinabile dal gradiente della funzione

$$\hat{u}_c = \frac{\vec{\nabla} f(x,y)}{\left|\vec{\nabla} f(x,y)\right|}$$

Backup Slides