

➤ **Definizione soggettiva di probabilita'** : *de Finetti (1930) e Savage*

nell'ignoranza dei fatti la probabilita' esprime il nostro grado di fiducia sulla verosimiglianza di una affermazione

Es. : se si ritenesse che le probabilita' di vincita della propria squadra del cuore in un derby cittadino siano del 80% qual'e' il massimo che si e' disposti a scommettere ? si dovrebbe essere disposti a puntare 80 euro sulla vincita della propria squadra per riceverne 100 in caso di vittoria della squadra e perdendo tutto in caso di sconfitta o pareggio

- la definizione soggettiva di probabilita' e' basata sulla nozione di gioco equo e sulla di speranza di vincita

<https://www.roma1.infn.it/~dagos/PRO/node28.html>

la probabilita' di un evento e' il prezzo che un individuo ritiene equo pagare per ricevere 1 se l'evento si verifica, ma per ricevere 0 se l'evento non si verifica. Inoltre : le probabilita' degli eventi devono essere attribuite in modo che non sia possibile ottenere una vincita o una perdita certa (criterio di coerenza).

la definizione soggettiva di probabilità

- permette di superare i limiti delle due precedenti definizioni perché consente di calcolare la probabilità di eventi anche quando gli eventi elementari non sono equiprobabili (definizione classica) e anche quando l'esperimento non può essere ripetuto (definizione frequentistica)
- ma introduce un alto livello di arbitrarietà dato che è fondata sull'opinione di singoli individui, che potrebbero avere propensioni al rischio molto diverse tra loro.

Risultati elementari ed eventi

esempio del lancio del dado: i risultati elementari A_i possibili nel lancio di un dado (o eventi elementari) sono sei:

esce la faccia 1 $\Rightarrow \{1\}$, esce la faccia 2 $\Rightarrow \{2\}$ esce la faccia 6 $\Rightarrow \{6\}$

sintetizzando : $A_i =$ esce la faccia i per $i = 1, 2, \dots, 6$

Eventi = insiemi di risultati

ad es. un evento B potrebbe essere : {esce un numero pari} $\Rightarrow \{2, 4, 6\}$

Evento certo (S) = insiemi di tutti i risultati possibili

esce la faccia 1, o la faccia 2, o la faccia 3, o la quattro, o la cinque, o la sei

$S \Rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Evento vuoto (\emptyset) o evento impossibile = insieme complemento di S

Attenzione: l'insieme di tutti i risultati possibili e la probabilita' di ogni evento sono specifici ad ogni dato esperimento

Lancio di un dado equo
(risultati elementari equiprobabili)

Insieme di tutti i possibili risultati elementari

Lancio di un dado	Probabilita' def. classica	Prob. In per cento
1	1/6	16.67
2	1/6	16.67
3	1/6	16.67
4	1/6	16.67
5	1/6	16.67
6	1/6	16.67

(1); (2); (3);
(4); (5); (6)

(risultati elementari equiprobabili)
eventi equiprobabili)

Eventi elementari

1; 2; 3; 4; 5; 6

Lancio di due dadi equi
(risultati elementari equiprobabili)

Insieme di tutti i possibili risultati elementari

(1, 1); (1, 2); (1, 3); (1, 4); (1, 5); (1, 6)
(2, 1); (2, 2); (2, 3); (2, 4); (2, 5); (2, 6)
(3, 1); (3, 2); (3, 3); (3, 4); (3, 5); (3, 6)
(4, 1); (4, 2); (4, 3); (4, 4); (4, 5); (4, 6)
(5, 1); (5, 2); (5, 3); (5, 4); (5, 5); (5, 6)
(6, 1); (6, 2); (6, 3); (6, 4); (6, 5); (6, 6)

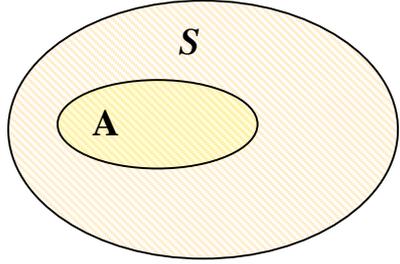
Eventi: somma dei risultati del lancio di due dadi

2 = (1 + 1)
3 = (1 + 2); (2 + 1)
4 = (1 + 3); (2 + 2); (3 + 1)
5 = (1 + 4); (2 + 3); (3 + 2); (4 + 1)
6 = (1 + 5); (2 + 4); (3 + 3); (4 + 2); (5 + 1)
7 = (1 + 6); (2 + 5); (3 + 4); (4 + 3); (5 + 2); (6 + 1)
8 = (2 + 6); (3 + 5); (4 + 4); (5 + 3); (6 + 2)
9 = (3 + 6); (4 + 5); (5 + 4); (6 + 3)
10 = (4 + 6); (5 + 5); (6 + 4)
11 = (5 + 6); (6 + 5)
12 = (6 + 6)

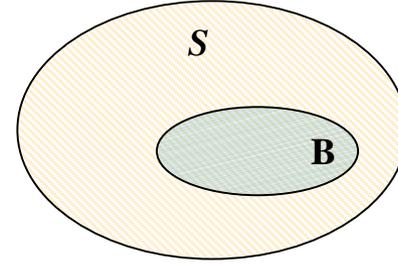
Somma del lancio di due dadi	Probabilita' def. classica	Prob. In per cento
2	1/36	2.78 %
3	2/36	5.56 %
4	3/36	8.33 %
5	4/36	11.11 %
6	5/36	13.89 %
7	6/36	16.67 %
8	5/36	13.89 %
9	4/36	11.11 %
10	3/36	8.33 %
11	2/36	5.56 %
12	1/36	2.78 %

(risultati elementari equiprobabili)
ma eventi **non equiprobabili**)

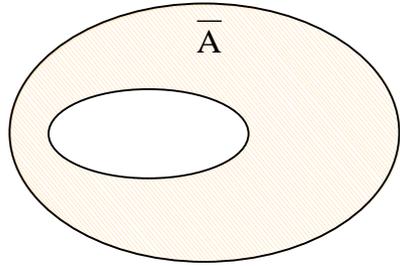
Rappresentazione degli insiemi con i "Diagrammi di Venn"



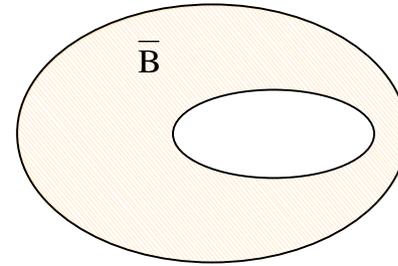
$$A \subset S$$



$$B \subset S$$



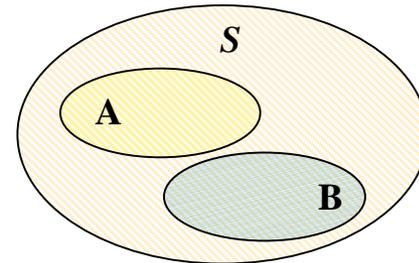
$$\bar{A} \subset S$$



$$\bar{B} \subset S$$

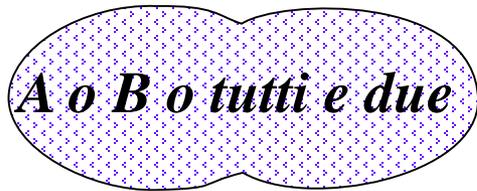
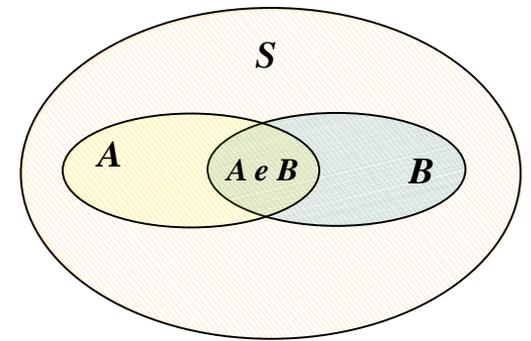
insiemi disgiunti

$$A \cap B = \emptyset$$

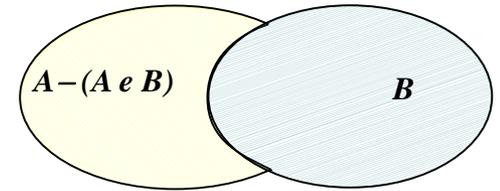


insiemi non disgiunti

$$A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow$$

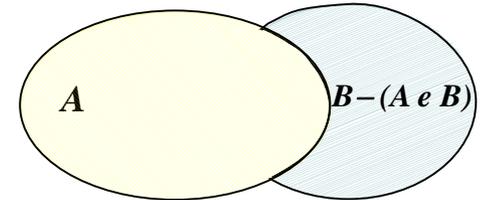


$$= (A - (A \cap B)) \cup B \Rightarrow$$



o indifferentemente

$$(B - (A \cap B)) \cup A \Rightarrow$$



➤ altri **eventi** che determinano lo **"spazio degli eventi"** del lancio di un dado

evento "impossibile"

detto anche :

evento "vuoto" $\equiv \{\emptyset\}$



ossia: numero (k) che compare sulla faccia del dado

o maggiore di 6, o minore di 1 o indeterminato

in termini matematici: $\{\emptyset\} \Rightarrow k < 1$ o $k > 6$

{ evento "certo" } $\equiv \{S\}$

⇒ { o esce la faccia 1,
o la faccia 2,
o la 3, o la 4,
o la 5, o la 6 }

{S} ⇒ $k = 1, \text{ o } 2, \dots \text{ o } 6$

$k \in [1, 6]$ con $k \in \mathbb{N}$

➤ una volta assegnate le probabilita' agli eventi dello spazio degli eventi
e' possibile determinare la prob. di eventi complessi, costituiti da sottoinsiemi
di risultati elementari grazie agli *assiomi di Kolmogorov*

➤ Definizione assiomatica di probabilita':

assiomi di Kolmogorov :

- $P(A) \geq 0$ la probabilita' e' un numero reale positivo
attenzione : e' vero che se $A \equiv \emptyset \Rightarrow P(A) = 0$ ma
NON e' vero che se $P(A) = 0 \Rightarrow A \equiv \emptyset$
- $P(S) = 1$ la probabilita' dell'evento certo e' uguale ad uno
attenzione : e' vero che se $A \equiv S \Rightarrow P(S) = 1$ ma
NON e' vero che se $P(A) = 1 \Rightarrow A \equiv S$
- $P(A \circ B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ e } B)$

dove $P(A \circ B)$ e' la probabilita' che avvenga o l'evento A, o l'evento B,
o tutti e due gli eventi

Probabilità condizionale:

$$P(A / B) = \frac{P(A \text{ e } B)}{P(B)} \quad \text{equivalentemente} \quad P(B / A) = \frac{P(A \text{ e } B)}{P(A)}$$

Eventi incompatibili (mutuamente escludentesi):

due eventi sono incompatibili , o mutuamente escludentesi, quando

→ **se avviene A non può avvenire B e viceversa**

se l'evento (A e B) non può avvenire

→ (A e B) è l'evento vuoto e $P(A \text{ e } B) = 0$

Eventi indipendenti:

due eventi sono indipendenti se $P(A / B) = P(A)$ o $P(B / A) = P(B)$

in altri termini, se si ha $P(A \text{ e } B) = P(A) \cdot P(B)$

attenzione a non confondere i concetti di **indipendenza** e di **incompatibilita'**

Esercizio

Un tiratore ha probabilita' 0.712 di fare centro al primo colpo. Se prende l' autobus per recarsi al poligono di tiro quale sara' la probabilita' totale di ricevere un biglietto dell'autobus con un numero pari oppure di fare centro al primo colpo ?

$$\{\text{Evento A}\} = \text{centro al primo colpo} \quad \Rightarrow \quad p_A = 0.7124$$

$$\{\text{Evento B}\} = \text{biglietto con numero pari} \quad \Rightarrow \quad p_B = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$\text{dagli assioni di Kolmogorov} \quad p(A \text{ o } B) = p(A) + p(B) - p(A \text{ e } B)$$

$$\text{i due eventi sono indipendenti tra loro quindi} \quad p(A \text{ e } B) = p_A \cdot p_B$$

$$\text{percio':} \quad p_T = p(A \text{ o } B) = p_A + p_B - p_A p_B$$

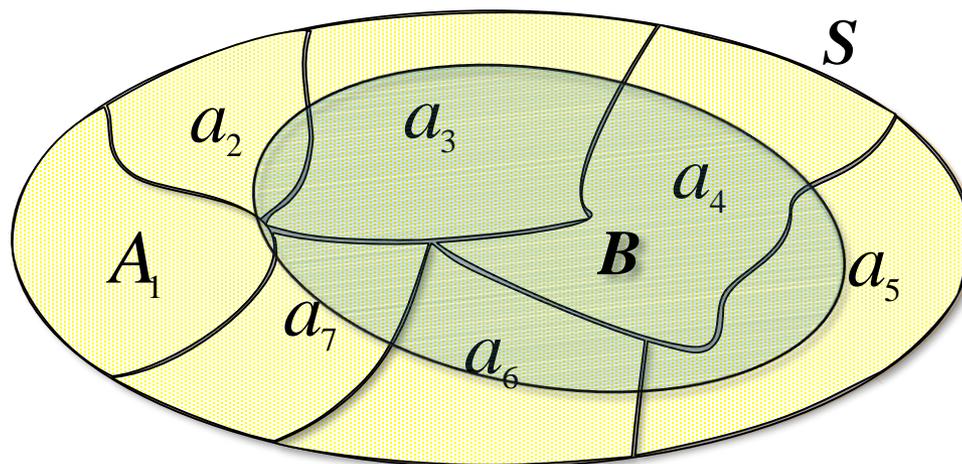
$$\Leftrightarrow p_T = 0.7124 + 0.5 - (0.7124 \cdot 0.5) = 0.856$$

Teorema della probabilita' assoluta o delle " probabilita' totali "

gli eventi A_i costituiscono una *partizione* di S

se $A_i \cap A_j = \emptyset$ con $i \neq j$ e se $\bigcup_{i=1}^n A_i = S$

in italiano: gli A_i sono come i tasselli di un puzzle



se B e' un qualsiasi evento dello spazio $S \Rightarrow P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i)P(B / A_i)$

(teorema della probabilita' assoluta o delle probabilita' totali)

esempio: nel lancio del dado $S = \{1,2,3,4,5,6\}$ $A_i =$ esce la faccia i per $i = 1,2,\dots,6$

chiaramente gli A_i costituiscono una partizione di S

se l'evento B fosse : { esce un numero pari }

$$\begin{aligned} \rightarrow P(B) &= P(1)P(\text{pari}/1) + P(2)P(\text{pari}/2) + \dots + P(6)P(\text{pari}/6) = 1/6 \cdot 0 + 1/6 \cdot 1 + \dots + 1/6 \cdot 1 = \\ &3/6 = 1/2 \end{aligned}$$

Backup Slides