

Una slitta S di massa M , assimilabile a un punto materiale di ugual massa, si trova inizialmente in quiete su un piano orizzontale liscio σ . Nella parte posteriore della slitta è fissata una molla ideale avente massa trascurabile e costante elastica k , il cui estremo libero è dotato di respingente, a sua volta di dimensioni e massa trascurabili

A partire da un dato istante t_0 la molla viene compressa da un proiettile puntiforme P di massa m , che si conficca istantaneamente nel respingente giungendovi con velocità di modulo v parallela al piano σ e scivolando senza attrito sul piano stesso.

Supponendo che la variazione di energia interna sia molto piccola rispetto all'energia meccanica in gioco e assumendo l'assenza di qualsiasi altro effetto dissipativo, calcolare le espressioni delle seguenti quantità:

- la velocità v' che assume il centro di massa del sistema ($S + P$) al generico istante $t > t_0$
- la massima compressione d subita dalla molla
- la pulsazione ω del moto periodico al quale è soggetto il proiettile

prima dell'urto $\vec{v}_{cm} = \frac{m}{m+M} \vec{v}$

il sistema slitta piu' proiettile e' isolato quindi $\vec{Q} = \vec{R}^{est} = 0 \Rightarrow \vec{Q} = cost$

se ne deduce che la velocita' del centro di massa rimarra' la stessa quindi in modulo $v'_{cm} = v_{cm} = \frac{m}{m+M} v$

sul sistema non agiscono forze dissipative quindi potremo imporre la conservazione dell'energia meccanica

inizialmente l'energia potenziale e' nulla e l'energia cinetica totale e' quella del proiettile dopo l'urto la molla

raggiungera' una massima compressione d e in questo istante avra' accumulato un energia potenziale pari a

$\frac{1}{2}kd^2$ mentre il proiettile e la slitta procederanno come un singolo punto di massa $(m+M)$ e con

velocita' comune pari a quella del centro di massa

$$\frac{1}{2}kd^2 + \frac{1}{2}(m+M)v_{cm}^2 = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow kd^2 = mv^2 - (m+M)v_{cm}^2$$

$$d = \sqrt{\frac{mv^2 - (m+M)v_{cm}^2}{k}} = \sqrt{\frac{mv^2 - \left(\frac{m^2}{m+M}\right)v^2}{k}}$$

in conclusione
$$d = v \sqrt{\frac{mM}{k(m+M)}}$$

per quanto riguarda la pulsazione ω del moto periodico al quale è soggetto il proiettile si ha :

$$m\ddot{x} = -kx \quad m\ddot{x} + kx = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

da notare come l'ipotesi che non siano in azione forze dissipative contrasti con l'anelasticità dell'urto. In effetti se il proiettile si conficca nel respingente in qualche modo deve modificare la sua forma e o quella del respingente e ciò implica una modifica dell'energia interna del sistema. Se tuttavia la variazione di energia interna fosse molto piccola rispetto all'energia meccanica in gioco la si potrebbe trascurare e ciò consentirebbe di imporre ed utilizzare la legge di conservazione dell'energia meccanica.

Backup slides