Moti nel piano

Moti armonici semplici

il moto circolare uniforme piano proiettato sugli assi cartesiani

produce moti sinusoidali (armonici)   unidimensionali

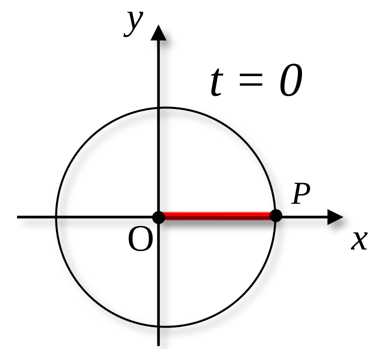
$$x(t) = r \cos(\ \theta(t)\ ) = r \cos(\ \omega t + \theta_0\ )$$

$$y(t) = r\, sen(\ \theta(t)\ ) = r\, sen(\ \omega t + \theta_0\ )$$

notare la differenza tra il concetto   di pulsazione   e di velocita' angolare

che coincidono nel moto circolare uniforme se al tempo $t = 0$ il punto si trova nella posizione $(+A, 0)$

$\rightarrow$ $\theta_0 = \theta(0) = 0$ $\rightarrow$ le proiezioni del moto sugli assi al generico tempo t



sono

$$x = A\cos(\omega t + \vartheta_0) = A\cos(\omega t)$$

$$y = A\,sen(\omega t + \vartheta_0) = A\,sen(\omega t)$$

$$x = A\cos(\omega t) \Rightarrow \frac{x}{A} = \cos(\omega t) \Rightarrow \frac{x^2}{A^2} = \cos^2(\omega t)$$

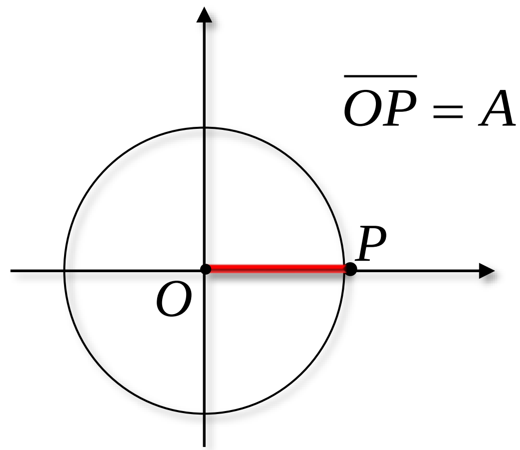
$$y = A\,sen(\omega t) \Rightarrow \frac{y}{A} = sen(\omega t) \Rightarrow \frac{y^2}{A^2} = sen^2(\omega t)$$

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{A^2} = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = A^2$$

dunque la traiettoria e' una circonferenza di raggio A , ma in quale senso e' percorsa, orario o antiorario ?

se
$$x = A\cos(\omega t)$$
$$y = A\mathrm{sen}(\omega t)$$

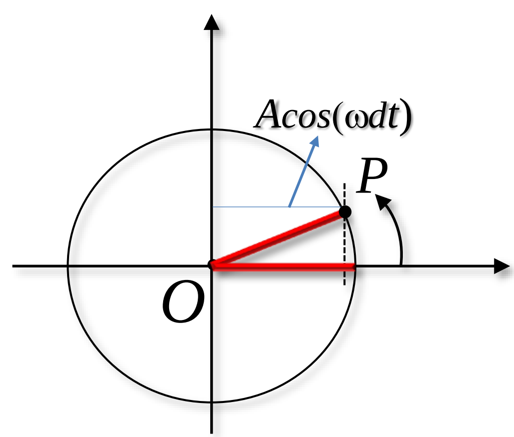
al tempo $t = 0$



$$x(t=0) = A\cos(0) = A$$
$$y(t=0) = A\mathrm{sen}(\omega t) = 0$$

al tempo $t = +dt$

$$x = A\cos(\omega dt) < A$$
$$y = A\mathrm{sen}(\omega dt) > 0$$

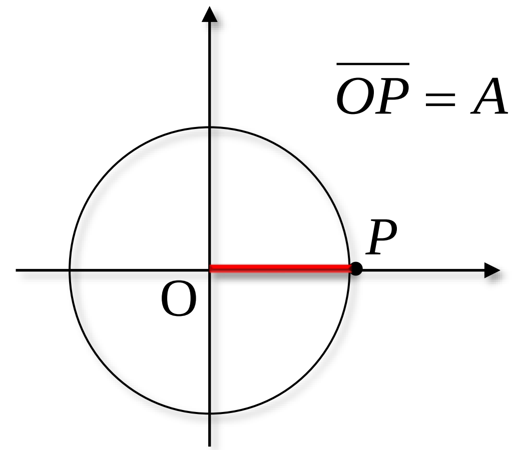


⇨ senso antiorario (levogiro)

se

$$x = A\cos(\omega t)$$

$$y = -A\,sen(\omega t)$$



a $t = 0$

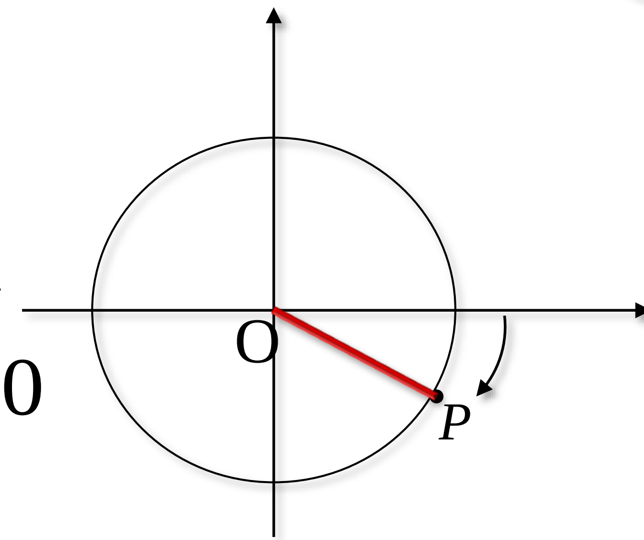
$$x(t=0) = A\cos(0) = A$$

$$y(t=0) = -A\,sen(\omega t) = 0$$

al tempo $t = +\,dt$

$$x = A\cos(\omega dt) < A$$

$$y = -A\,sen(\omega dt) < 0$$



⇨ senso orario (destrogiro)

la traiettoria e' ancora una circonferenza, ma il senso di percorrenza e' orario

- da notare che $y = -A\,sen(\omega t) = A\cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$

posto $$x = A\cos(\omega t)$$ $$y = A\cos(\omega t + \vartheta_0)$$ se

$\vartheta_0 = 0$

$$x = A\cos(\omega t)$$
$$y = A\cos(\omega t)$$

$$y = x$$

traiettoria rettilinea

$\vartheta_0 = \pi$

$$x = A\cos(\omega t)$$
$$y = A\cos(\omega t + \pi) = -A\cos(\omega t)$$

$$y = -x$$

traiettoria rettilinea

$\vartheta_0 = \frac{\pi}{2}$

$$x = A\cos(\omega t)$$
$$y = A\cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) = -A sen(\omega t)$$

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{A^2} = 1$$

traiettoria circolare destrogira

$\vartheta_0 = \frac{3\pi}{2}$

$$x = A\cos(\omega t)$$
$$y = A\cos(\omega t + \frac{3\pi}{2}) = A sen(\omega t)$$

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{A^2} = 1$$

traiettoria circolare levogira

piu' in generale posto $$x = A\cos(\omega t)$$ $$y = B\cos(\omega t + \vartheta_0)$$ se

$\vartheta_0 = 0$

$$x = A\cos(\omega t)$$
$$y = B\cos(\omega t)$$

$$y = \frac{B}{A}x$$ traiettoria rettilinea

$\vartheta_0 = \pi$

$$x = A\cos(\omega t)$$
$$y = B\cos(\omega t + \pi) = -B\cos(\omega t)$$

$$y = -\frac{B}{A}x$$ traiettoria rettilinea

$\vartheta_0 = \frac{\pi}{2}$

$$x = A\cos(\omega t)$$
$$y = B\cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) = -Bsen(\omega t)$$

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$$ traiettoria ellittica destrogira

$\vartheta_0 = \frac{3\pi}{2}$

$$x = A\cos(\omega t)$$
$$y = B\cos(\omega t + \frac{3\pi}{2}) = Bsen(\omega t)$$

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$$ traiettoria ellittica levogira

due moti armonici indipendenti con differenza di fase di $\pi/2$ combinati insieme

possono dare origine non solo ad un moto circolare nel piano

ma modificando la fase relativa e/o la frequenza e/o l'ampiezza si possono

ottenere una serie di diverse traiettorie (figure di Lissajous)

per una dimostrazione in aula andare al sito :

http://ngsir.netfirms.com/englishhtm/Lwave.htm

Backup Slides