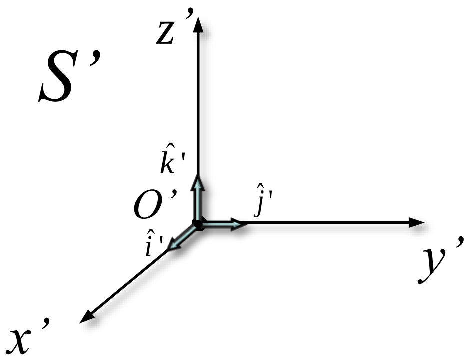
<u>Moti relativi : caso generale</u>

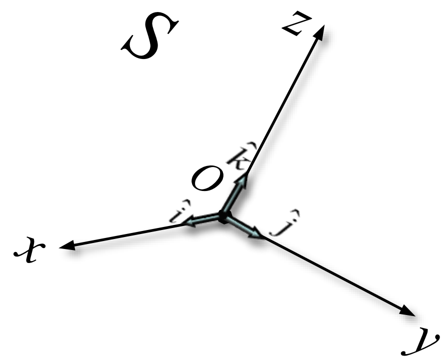
trasformazioni **galileiane** per un generico moto relativo di ***<u>rototraslazione</u>***

del sistema mobile S rispetto al sistema fisso S'

- si assume che l'osservatore sia solidale con il sistema S'
- si assume che il sistema mobile sia il sistema S

<u>attenzione</u>: di solito la notazione e' l'opposto !





sistema S' **<u>fisso</u>** e solidale

con l'osservatore posto in O'

S' e' definito dai versori $\hat{i}'\ \hat{j}'\ \hat{k}'$

sistema S **<u>mobile</u>** nello spazio

con l'osservatore posto in O

S e' definito dai versori $\hat{i}(t)\ \hat{j}(t)\ \hat{k}(t)$

notazione : tutte le quantita' accentate si riferiscono alle grandezze quando sono considerate a partire dal sistema S'

per uniformarsi al testo di riferimento:

- grandezze riferite al sistema fisso S' saranno denominate *assolute* e saranno individuate dal pedice A

  ad es. $\vec{r}_{P_A}$ per il vettore posizione (o indifferentemente $\vec{r}_{A_P}$)

- grandezze riferite al sistema mobile S saranno denominate *relative* e saranno individuate dal pedice R ad es. $\vec{r}_{P_R}$ (o indifferentemente $\vec{r}_{R_P}$)

- verra' usata la scrittura abbreviata $\dfrac{dx}{dt} \Rightarrow \dot{x}$ e $\dfrac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow \ddot{x}$

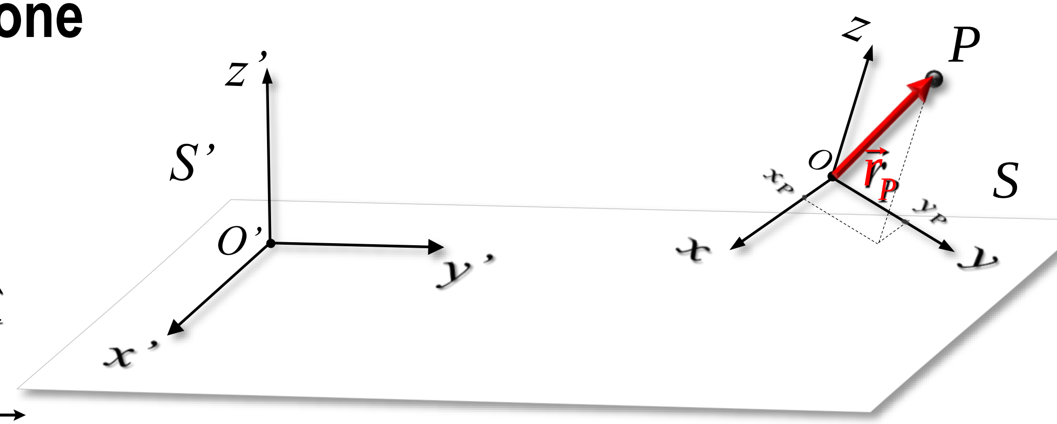
Trasformazione del vettore posizione

$\vec{r}_P$ e' la posizione del generico punto P

vista a partire dal sistema di riferimento

mobile S ⇨ $\vec{r}_P = x_P\hat{i} + y_P\hat{j} + z_P\hat{k}$

secondo la notazione proposta → $\vec{r}_P \equiv \vec{r}_{P_R}$

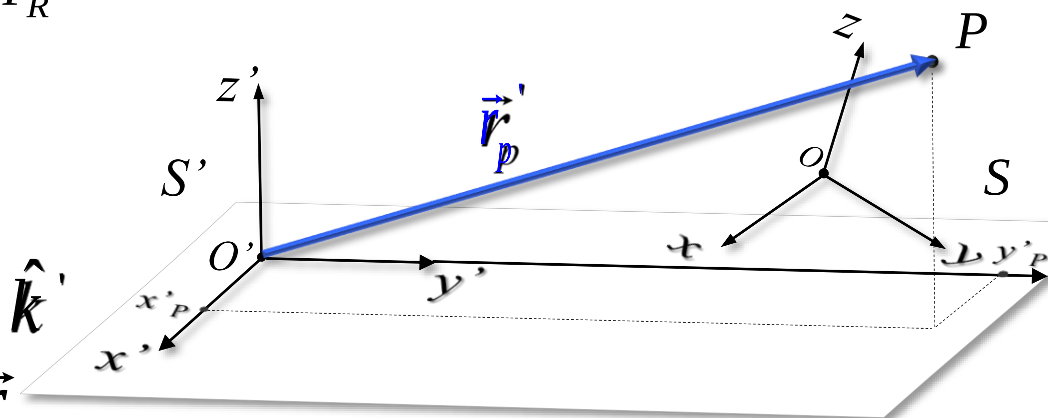


$\vec{r}\,'_p$ e' la posizione del generico punto P

vista a partire dal sistema di riferimento

fisso S' ⇨ $\vec{r}\,'_p = x'_P\,\hat{i}\,' + y'_P\,\hat{j}\,' + z'_P\,\hat{k}\,'$

secondo la notazione proposta → $\vec{r}\,'_P \equiv \vec{r}_{P_A}$

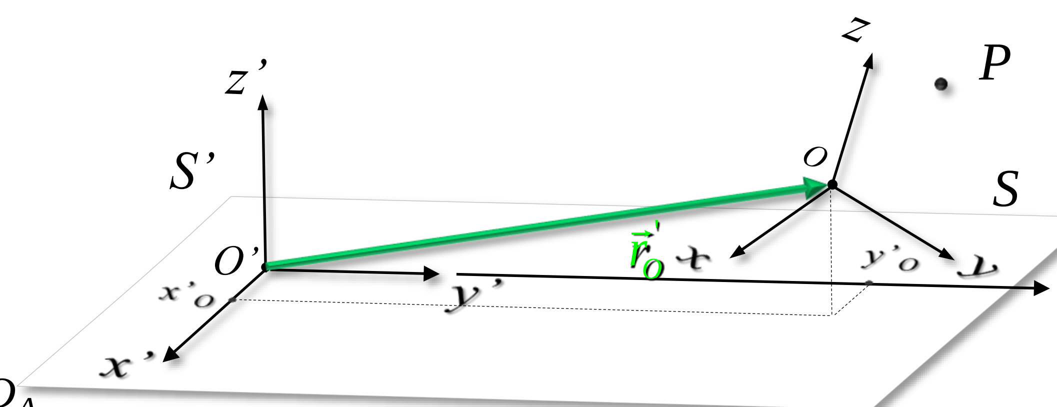


$\vec{r}\,'_O$ e' la posizione di O vista a partire

dal sistema di riferimento fisso S'

⇨ $\vec{r}\,'_O = x'_O\,\hat{i}\,' + y'_O\,\hat{j}\,' + z'_O\,\hat{k}\,'$

secondo la notazione proposta → $\vec{r}\,'_O \equiv \vec{r}_{O_A}$

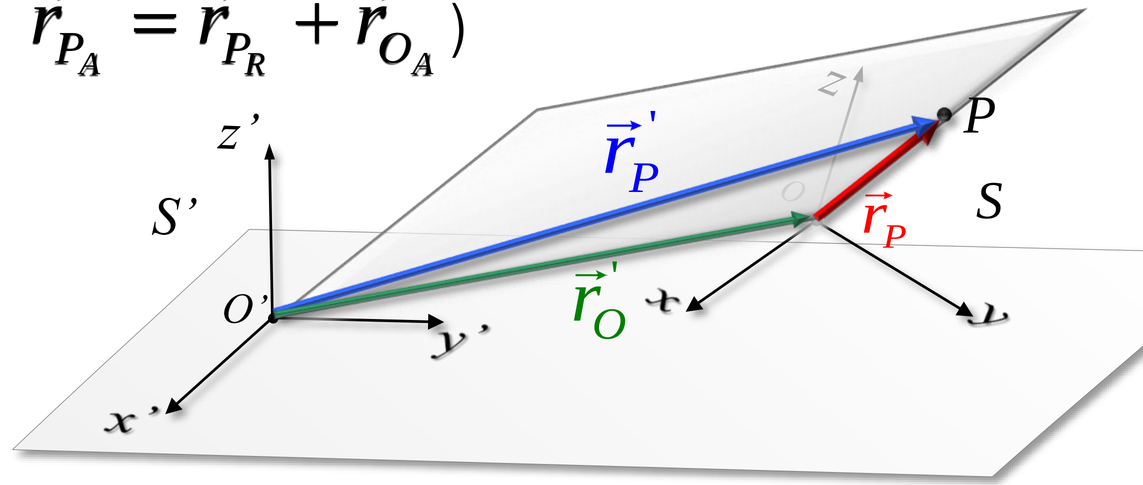


Trasformazione del vettore posizione

$\vec{r}_P{}' = \vec{r}_P + \vec{r}_O{}'$ (o anche $\vec{r}_{P_A} = \vec{r}_{P_R} + \vec{r}_{O_A}$)

fisica ?

la fisica sta nella assunzione implicita che lo spazio sia euclideo

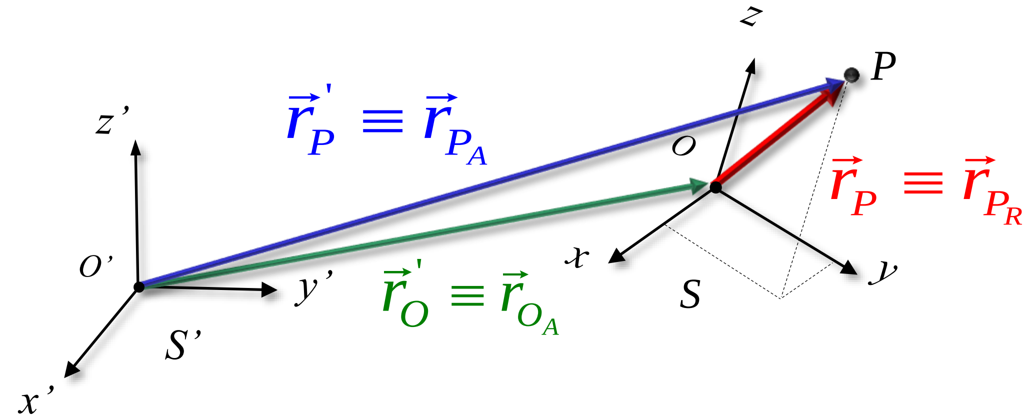


$$x'_P\,\hat{i}' + y'_P\,\hat{j}' + z'_P\,\hat{k}' = x_P\,\hat{i} + y_P\,\hat{j} + z_P\,\hat{k} + x'_O\,\hat{i}' + y'_O\,\hat{j}' + z'_O\,\hat{k}'$$

per semplificare la notazione verra' omesso il pedice P quindi $x'_P\,\hat{i}' \to x'\hat{i}'$ $x_P\hat{i} \to x\hat{i}$ etc. ma sara' mantenuto il pedice O in riferimento all'origine del sistema in moto S

- $x'\hat{i}' + y'\hat{j}' + z'\hat{k}' = x\,\hat{i} + y\,\hat{j} + z\,\hat{k} + x'_O\,\hat{i}' + y'_O\,\hat{j}' + z'_O\,\hat{k}'$

Trasformazione della velocita'



derivando la $\vec{r}_{P_A} = \vec{r}_{P_R} + \vec{r}_{O_A}$

rispetto al tempo $$\frac{d\vec{r}_{P_A}}{dt} = \frac{d\vec{r}_{P_R}}{dt} + \frac{d\vec{r}_{O_A}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(x'\hat{i}'+y'\hat{j}'+z'\hat{k}') = \frac{d}{dt}(x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}) + \frac{d}{dt}(x'_0\hat{i}'+y'_0\hat{j}'+z'_0\hat{k}')$$

$$\frac{d\vec{r}_{P_A}}{dt} = \frac{d}{dt}(x'\hat{i}'+y'\hat{j}'+z'\hat{k}') \qquad \frac{d\vec{r}_{O_A}}{dt} = \frac{d}{d\,t}(x'_O\,\hat{i}' + y'_O\,\hat{j}' + z'_O\,\hat{k}')$$

$$\downarrow$$

$$\frac{d}{dt}(x'\hat{i}') + \frac{d}{dt}(y'\hat{j}') + \frac{d}{dt}(z'\hat{k}')$$

$$\downarrow$$

$$\frac{dx'}{dt}\hat{i}' + \cancel{x'\frac{d\hat{i}'}{dt}} + \frac{dy'}{dt}\hat{j}' + \cancel{y'\frac{d\hat{j}'}{dt}} + \frac{dz'}{dt}\hat{k}' + \cancel{z'\frac{d\hat{k}'}{dt}}$$

i versori $\hat{i}'$ $\hat{j}'$ $\hat{k}'$ sono fissi nel tempo

$\Rightarrow$ $\frac{d\hat{i}'}{dt} = 0$ $\frac{d\hat{j}'}{dt} = 0$ e $\frac{d\hat{k}'}{dt} = 0$

il calcolo procede esattamente come in precedenza

$$\frac{dx'}{dt}\hat{i}' + \frac{dy'}{dt}\hat{j}' + \frac{dz'}{dt}\hat{k}'$$

$$\downarrow$$

$$\dot{x}'\hat{i}' + \dot{y}'\hat{j}' + \dot{z}'\hat{k}' \equiv \vec{\mathbf{v}}_{P_A} \qquad \dot{x}'_O\,\hat{i}' + \dot{y}'_O\,\hat{j}' + \dot{z}'_O\,\hat{k}' \equiv \vec{\mathbf{v}}_{O_A}$$

velocita' di P nel sistema fisso S'

→ velocita' "***assoluta***" di P

velocita' di O nel sistema fisso S'

→ velocita' "***assoluta***" di O

$$\frac{d\vec{r}_{P_R}}{dt} = \frac{d}{dt}(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})$$

$$\downarrow$$

$$\frac{d}{dt}(x\hat{i}) + \frac{d}{dt}(y\hat{j}) + \frac{d}{dt}(z\hat{k})$$

$$\downarrow$$

$$\frac{dx}{dt}\hat{i} + x\frac{d\hat{i}}{dt} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + y\frac{d\hat{j}}{dt} + \frac{dz}{dt}\hat{k} + z\frac{d\hat{k}}{dt}$$

i versori $\hat{i}$ $\hat{j}$ $\hat{k}$ - <u>non</u> - sono fissi

⇨ $\frac{d\hat{i}}{dt} \neq 0$ $\frac{d\hat{j}}{dt} \neq 0$ e $\frac{d\hat{k}}{dt} \neq 0$

$$\downarrow$$

$$\dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k} + x\frac{d\hat{i}}{dt} + y\frac{d\hat{j}}{dt} + z\frac{d\hat{k}}{dt}$$

$$\downarrow$$

$$\vec{v}_{P_R} + x\frac{d\hat{i}}{dt} + y\frac{d\hat{j}}{dt} + z\frac{d\hat{k}}{dt}$$

$\vec{v}_{P_R}$ → velocita' di P nel sistema mobile S ossia velocita' "***relativa***" di P

in conclusione :

derivando la $\vec{r}_{P_A} = \vec{r}_{P_R} + \vec{r}_{O_A}$ rispetto al tempo si ha

$$\frac{d\vec{r}_{P_A}}{dt} = \frac{d\vec{r}_{P_R}}{dt} + x\frac{d\hat{i}}{dt} + y\frac{d\hat{j}}{dt} + z\frac{d\hat{k}}{dt} + \frac{d\vec{r}_{O_A}}{dt}$$

ossia $$\boxed{\vec{\mathrm{v}}_{P_A} = \vec{\mathrm{v}}_{P_R} + x\frac{d\hat{i}}{dt} + y\frac{d\hat{j}}{dt} + z\frac{d\hat{k}}{dt} + \vec{\mathrm{v}}_{O_A}}$$

il termine: $$x\frac{d\hat{i}}{dt}+y\frac{d\hat{j}}{dt}+z\frac{d\hat{k}}{dt}+\vec{v}_{O_A}=\vec{v}_T$$

e' detto " ***velocita' di trascinamento*** " perche' e' la velocita' che avrebbe

P rispetto ad S' se $\vec{v}_{P_R}=0$ vale a dire se la posizione di P

fosse fissata rigidamente rispetto all'origine O del sistema S

in sintesi $$\vec{\mathbf{v}}_{P_A}=\vec{\mathbf{v}}_{P_R}+\vec{\mathbf{v}}_T$$

con $$\vec{v}_T=x\frac{d\hat{i}}{dt}+y\frac{d\hat{j}}{dt}+z\frac{d\hat{k}}{dt}+\vec{v}_{O_A}$$

Backup Slides