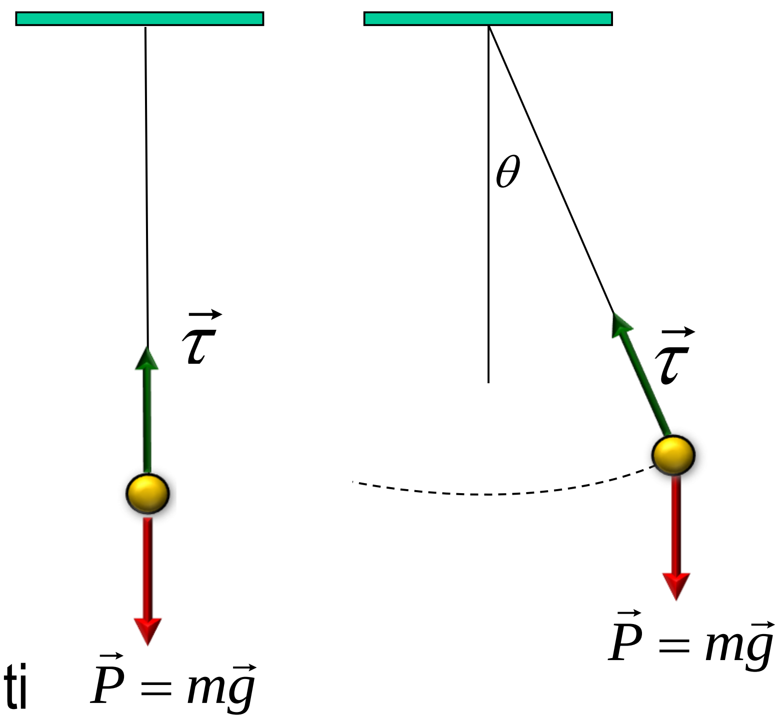
Pendolo semplice

il pendolo semplice consiste di un punto materiale di massa m appeso ad un filo ideale di lunghezza l all'equilibrio statico il pendolo e' nella posizione verticale, **se si allontana il punto dalla posizione di equilibrio e lo si rilascia inizia un moto circolare periodico**



attenzione :

fuori dalla posizione di equilibrio la condizione e' dinamica percio' la risultante delle forze agenti non sara' uguale a zero, ma pari a $m\vec{a}$

$$\Rightarrow \quad m\vec{g} + \vec{\tau} = m\vec{a}$$

proiettando le forze lungo la direzione del filo e lungo

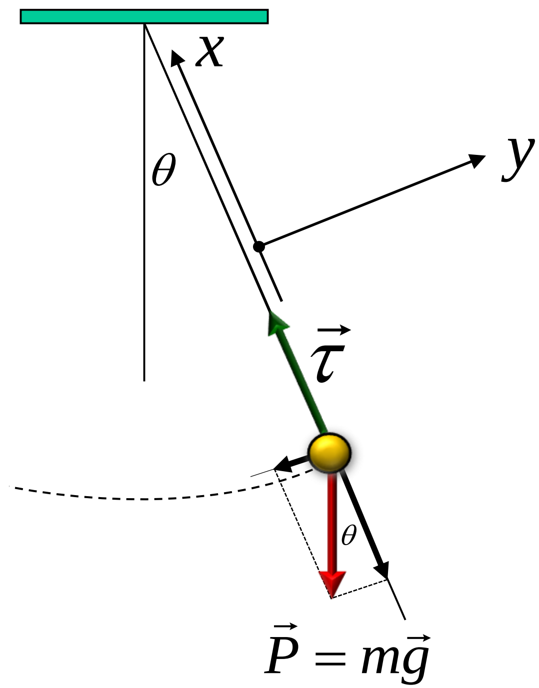
la direzione perpendicolare al filo   ossia

tangente alla traiettoria   si ha

$$\tau - mg\cos\theta = ma_c$$

$$-mgsen\theta = ma_t$$

dove $\tau = \left|\vec{\tau}\right|$



e’ il modulo della tensione nel filo

$$a_c = \omega^2 r = \frac{v^2}{r}$$

$$a_t = \frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{d^2(r\theta)}{dt^2} = r\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

in questo caso $r = l$ per cui :

$$a_c = \frac{v^2}{l}$$

$$a_t = l\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$ma_c \equiv m\frac{v^2}{l} = \tau - mg\cos\theta \Rightarrow \tau = m(g\cos\theta + \frac{v^2}{l})$$

$$ma_t \equiv ml\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgsen\theta \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}sen\theta = 0$$

la prima equazione fornisce la variazione della tensione nel filo in funzione del moto del punto materiale

la seconda equazione descrive il moto del punto materiale in termini angolari

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} sen\theta = 0$$

e' una equazione differenziale trascendente e non ha una semplice soluzione analitica

nella approssimazione di piccole oscillazioni e quindi per piccoli angoli si ha che

$$sen\vartheta \approx \vartheta$$

→ ***nell' approssimazione di piccole oscillazioni*** l'equazione del pendolo diviene

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

che, posto $\omega^2 = \frac{g}{l}$ → $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0$

equazione dell'oscillatore armonico percio' l'equazione oraria per l'angolo sara'

del tipo $\theta(t) = \theta_0 sen(\omega t + \phi)$

da $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ poiche' $\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$ si ha

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

da notare come il periodo del pendolo

non dipenda dalla massa e soprattutto non dipenda dall'ampiezza angolare

- proprieta' di **<u>isocronismo</u>** del pendolo per piccole oscillazioni se l'ampiezza angolare dell'oscillazione non fosse piccola, si può dimostrare

che il periodo del pendolo dipenderebbe da $\vartheta_{\max}$

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\, K\left(sen \frac{\vartheta_{\max}}{2} \right)$$

dove K è l'integrale ellittico completo di prima specie, valutato in $sen \dfrac{\vartheta_{\max}}{2}$

l'integrale ellittico completo di prima specie K è definito come

$$K(x) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-t^2)(1-x^2t^2)}}\, dt$$

e puo' anche essere stimato con il seguente sviluppo in serie di Taylor

$$K(\mathrm{k}) = \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{k}^{2n} \frac{\left((2n)!\right)^2}{16^n (n!)^4}$$

Backup Slides