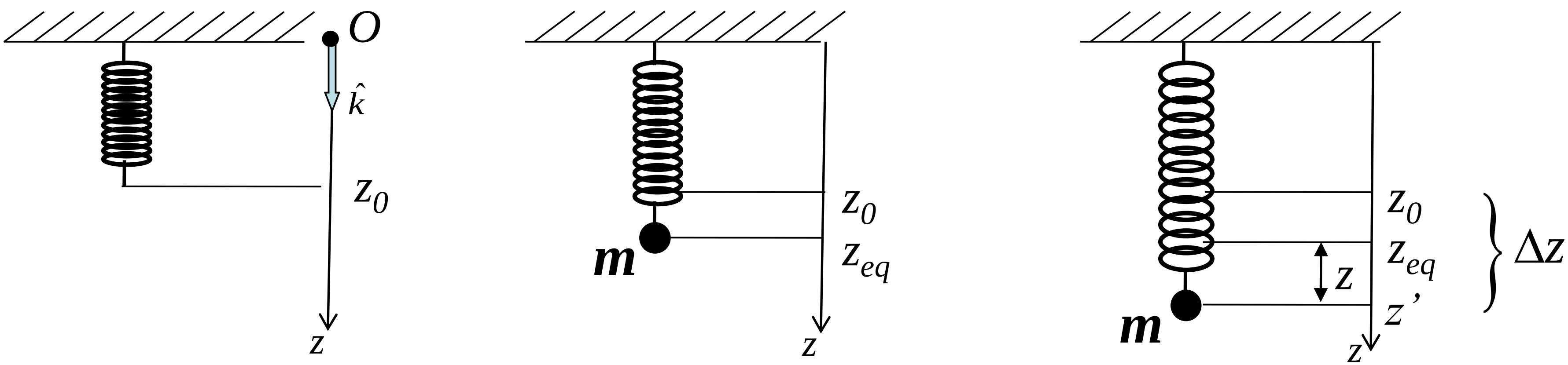
Calcolare il periodo T delle oscillazioni di un punto materiale di massa m situato all'estremo d'una molla di massa nulla, di lunghezza a riposo pari a z_0 e di costante elastica K vincolata al soffitto ed abbandonato nella posizione iniziale, definita dalla coordinata z rispetto alla posizione di equilibrio, con velocità iniziale nulla.



la molla sviluppa una forza di richiamo proporzionale all'elongazione della molla rispetto alla sua lunghezza a riposo

$\vec{F}_{el} = -K\Delta z\hat{k}$ e $\vec{F}_P = mg\hat{k}$ per cui la risultante delle forze agenti sul punto materiale di massa m sara' $\vec{R} = (mg - K\Delta z)\hat{k}$ ⇨ $\vec{a} = (g - \dfrac{K\Delta z}{m})\hat{k}$

$\Delta z = z' - z_0 \quad = z + (z_{eq} - z_0)$ e dalla condizione iniziale di equilibrio stabile

si avra' $mg = K(z_{eq} - z_0)$ da cui $(z_{eq} - z_0) = \frac{mg}{K}$

dunque $\vec{a} = (g - \frac{K}{m}(z + \frac{mg}{K}))\hat{k}$ quindi il moto avviene lungo l'asse z

ed e' dato dall'equazione

$$\frac{d^2 z}{dt^2} \equiv \ddot{z} = g - \frac{K}{m}(z + \frac{mg}{K}) \;= g - \frac{K}{m}(\frac{Kz + mg}{K})$$

$$= g - \frac{K}{m} z - g \quad = -\frac{K}{m} z$$

quindi $\ddot{z} = -\frac{K}{m} z$ ovvero $\ddot{z} + \frac{K}{m} z = 0$ ma $\ddot{z} + \omega^2 z = 0$

dove si e' posto $\omega^2 = \frac{K}{m}$ e' l'equazione del moto armonico semplice

da $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$ $\Rightarrow$ $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$

Backup Slides