Moto di un razzo

La massa iniziale di un missile è M_0. Il sistema di propulsione del razzo

espelle gas con rapidita' nota $\mu(t) = dm/dt$ e i gas di scarico

sono espulsi ad una velocità costante $-\vec{v}_{G_{rel}}$ relativamente al razzo.

Determinare l' accelerazione istantanea del razzo in assenza di forze esterne.

consideriamo il razzo come un sistema costituito dal missile vero e proprio

e dalle particelle di gas di scarico che fuoriescono e supponiamo che

all’istante t il gas sia ancora incombusto all'interno del razzo quindi

si muovera’ con la stessa velocità del missile $\vec{v}_{R_{ass}}(t)$

dove $\vec{v}_{R_{ass}}(t)$ è la velocità del razzo rispetto ad un riferimento inerziale

- la quantità di moto totale del sistema al tempo t sara’

$$\vec{Q}_{tot}(t) = M(t)\,\vec{v}_{R_{ass}}(t)$$

tra il tempo t e il tempo $t + \Delta t$ nella camera di scoppio avviene la combustione

del propellente con conseguente espulsione ad alta velocità dei gas di scarico

se Δm è la massa del gas espulso durante l'intervallo di tempo Δt

$$\Rightarrow \quad \Delta m = \mu(t)\, \Delta t$$

e la corrispondente variazione (negativa) ΔM subita dalla massa M del razzo

sarà $\Delta m = -\Delta M > 0$

per il terzo principio della dinamica sappiamo che le forze interne ad un

sistema isolato possono determinare soltanto variazioni nelle quantità di moto

delle singole parti del sistema ma in questo caso non sappiamo

quali forze si sviluppino al momento della combustione del propellente

tuttavia i loro effetti su una parte del sistema (missile) possono essere valutati

se si conosce come varia la quantità di moto della restante parte del sistema

(gas di scarico) e $\vec{\mathrm{v}}_{G_{rel}}(t) = costante = \vec{\mathrm{v}}_{G_{rel}}$ in questo caso e' nota in effetti $\vec{\mathrm{v}}_{G_{rel}}(t)$ dipendera' dalla composizione chimica del propellente

e dalle caratteristiche costruttive dei motori, ossia da cose determinabili prima del lancio del razzo

e sara' indipendente dalla velocita' del razzo

e anche il ritenerla per semplicita' costante nel tempo e' una ragionevole approssimazione

(almeno fino al completo esaurimento di tutto il combustibile)

per determinare l'accelerazione istantanea del missile dovremo determinare

la variazione $\Delta\vec{\mathrm{v}}_{R_{ass}}$ per Δt tendente a zero la variazione $\Delta\vec{v}_{R_{ass}}$ della velocita' del missile tra il tempo t e il tempo $t + \Delta t$

e' per definizione $\Delta\vec{v}_{R_{ass}} = \vec{v}_{R_{ass}}(t+\Delta t) - \vec{v}_{R_{ass}}(t)$

quindi nel riferimento inerziale, all'istante $t + \Delta t$

il razzo ha velocità $\vec{v}_{R_{ass}}(t+\Delta t) = \vec{v}_{R_{ass}}(t) + \Delta\vec{v}_{R_{ass}}$

e la velocità del gas espulso al tempo $t + \Delta t$ rispetto al riferimento inerziale è

$$\vec{v}_{G_{ass}}(t+\Delta t) = \vec{v}_{R_{ass}}(t+\Delta t) + \vec{v}_{G_{rel}}$$

nell'intervallo Δt la massa del missile sara' diminuita di Δm

quindi la quantità di moto totale del sistema al tempo $t + \Delta t$ sara'

$$\vec{Q}_{tot}(t+\Delta t) = \underbrace{\left(M(t)-\Delta m\right)\vec{\mathrm{v}}_{R_{ass}}(t+\Delta t)}_{\text{quantità di moto del missile}} + \underbrace{\Delta m\ \vec{\mathrm{v}}_{G_{ass}}(t+\Delta t)}_{\text{quantità di moto dei gas di scarico}}$$

la variazione della quantità di moto totale del sistema durante Δt e'

$$\Delta\vec{Q}_{tot} = \vec{Q}_{tot}(t+\Delta t)-\vec{Q}_{tot}(t)$$

sviluppando i calcoli → $$\Delta\vec{Q}_{tot} = M(t)\Delta\vec{\mathrm{v}}_{R_{ass}} + \Delta m\ \vec{\mathrm{v}}_{G_{rel}}$$

$$\Delta\vec{Q}_{tot} = M(t)\Delta\vec{v}_{R_{ass}} + \Delta m\, \vec{v}_{G_{rel}}$$

al tendere di Δt a zero la variazione della velocita' $\Delta\vec{v}_{R_{ass}}$ del razzo

e' ben approssimata dal differenziale $d\,\vec{v}_{R_{ass}}$

e per definizione di differenziale $d\,\vec{v}_{R_{ass}} = \left(\dfrac{d\,\vec{v}_{R_{ass}}}{dt}\right)dt = \vec{a}_{R_{ass}}\, dt$

anche m e' funzione del tempo e se $\Delta t \to 0$ $\Delta m \approx dm = \left(\dfrac{dm}{dt}\right)dt$

$$\Rightarrow \quad d\vec{Q}_{tot} = M(t)\vec{a}_{R_{ass}}\, dt + \left(\frac{dm}{dt}\right) \vec{v}_{G_{rel}}\, dt$$

ossia $$d\vec{Q}_{tot} = \left(M(t)\vec{a}_{R_{ass}} + \mu(t)\,\vec{\mathrm{v}}_{G_{rel}} \right) dt$$

se il sistema e' isolato la quantita' di moto totale si deve conservare

quindi $$d\vec{Q}_{tot} = 0 \quad \Rightarrow \quad M(t)\vec{a}_{R_{ass}} = -\mu(t)\,\vec{\mathrm{v}}_{G_{rel}}$$

il razzo accelera unicamente sotto l'azione della forza di spinta $\vec{S}(t)$

$$\vec{S}(t) = -\mu(t)\,\vec{\mathrm{v}}_{G_{rel}}$$

in conclusione : si può determinare la forza di spinta data al missile,

se si conoscono la rapidita’ di espulsione della massa di gas di scarico,

ossia la quantità di gas che viene espulsa per unità di tempo

e la velocità dei gas di scarico rispetto al razzo

Sviluppo dettagliato dei calcoli

la quantità di moto totale del sistema al tempo t è

$$\vec{Q}_{tot}(t) = M(t)\vec{\mathrm{v}}_{R_{ass}}(t)$$

per definizione $\Delta\vec{\mathrm{v}}_{R_{ass}} = \vec{\mathrm{v}}_{R_{ass}}(t+\Delta t) - \vec{\mathrm{v}}_{R_{ass}}(t)$

tenendo conto che nell'intervallo Δt la massa del razzo è diminuita di Δm,

la quantità di moto totale del sistema al tempo $t + \Delta t$ è

$$\vec{Q}_{tot}(t+\Delta t) = \left(M(t) - \Delta m\right)\vec{\mathrm{v}}_{R_{ass}}(t+\Delta t) + \Delta m\, \vec{\mathrm{v}}_{G_{ass}}(t+\Delta t)$$

ma $\vec{\mathrm{v}}_{G_{ass}}(t+\Delta t) = \vec{\mathrm{v}}_{R_{ass}}(t+\Delta t) + \vec{\mathrm{v}}_{G_{rel}}$

$$\vec{Q}_{tot}(t+\Delta t) = \left(M(t) - \Delta m\right)\vec{\mathrm{v}}_{R_{ass}}(t+\Delta t) + \Delta m\left(\vec{\mathrm{v}}_{R_{ass}}(t+\Delta t) + \vec{\mathrm{v}}_{G_{rel}}\right)$$

$$\vec{Q}_{tot}(t+\Delta t) = M(t)\,\vec{v}_{R_{ass}}(t+\Delta t) - \Delta m\,\vec{v}_{R_{ass}}(t+\Delta t)$$

$$+ \Delta m\,\vec{v}_{R_{ass}}(t+\Delta t) + \Delta m\,\vec{v}_{G_{rel}}$$

$$\vec{Q}_{tot}(t+\Delta t) = M(t)\,\vec{v}_{R_{ass}}(t+\Delta t) + \Delta m\,\vec{v}_{G_{rel}}$$

la variazione della quantità di moto totale durante Δt sara' data da

$$\Delta\vec{Q}_{tot} = \vec{Q}_{tot}(t+\Delta t) - \vec{Q}_{tot}(t)$$

$$\Delta\vec{Q}_{tot} = M(t)\,\vec{v}_{R_{ass}}(t+\Delta t) + \Delta m\,\vec{v}_{G_{rel}} - M(t)\vec{v}_{R_{ass}}(t)$$

$$= M(t)\left(\vec{v}_{R_{ass}}(t+\Delta t) - \vec{v}_{R_{ass}}(t)\right) + \Delta m\,\vec{v}_{G_{rel}}$$

in conclusione $$\Delta\vec{Q}_{tot} = M(t)\,\Delta\vec{v}_{R_{ass}} + \Delta m\,\vec{v}_{G_{rel}}$$

passando al limite per Δt tendente a zero

$$d\vec{Q}_{tot} = M(t)\, d\,\vec{v}_{R_{ass}} + dm\,\vec{v}_{G_{rel}}$$

Backup Slides