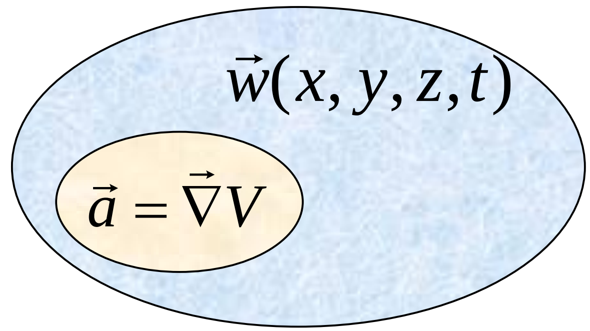
Campi vettoriali <u>conservativi</u>

campo *scalare*	operatore *gradiente*	campo *vettoriale*		
$V(x,y,z,t)\ \rightarrow$	$\vec{\nabla}V\ \rightarrow$	$\vec{a}(x,y,z,t)$	⇨	<u>***sempre***</u> possibile

ma il contrario **non** e’ vero



i campi vettoriali ricavabili da un campo scalare attraverso l’operatore gradiente

sono detti ***conservativi*** se si tratta di un campo conservativo di <u>*forze*</u>

$V(x,y,z,t)$ → “*funzione potenziale*”

$U(x,y,z,t) = -V$ → “ <u>***energia potenziale***</u>” (spesso $U \equiv E_P$)

Campi di forze conservative ed energia potenziale

le forze **conservative** si possono derivare da un campo scalare $V(x,y,z,t)$

per mezzo dell'operatore gradiente

$$\vec{F} = \vec{\nabla} V \quad \text{ovvero} \quad \vec{F} = -\vec{\nabla} U \quad \Rightarrow \quad F_x = -\frac{\partial U(x,y,z,t)}{\partial x} \quad F_y = -\frac{\partial U(x,y,z,t)}{\partial y} \quad F_z = -\frac{\partial U(x,y,z,t)}{\partial z}$$

Conservativita' di un campo di ***forze***

$$L_{A\to B} = \int_{A \atop \text{lungo } \Gamma}^{B} \vec{F}\cdot d\vec{l}$$

qualunque sia il percorso aperto Γ

$\Leftrightarrow$

$$L_C = \oint_C \vec{F}\cdot d\vec{l} = 0$$

qualunque sia il circuito chiuso C

$\Leftrightarrow$

$$L_{A\to B} = -\Delta U$$

$\Leftrightarrow$

$$\vec{\nabla}\times\vec{F} = 0$$

↓

sono definizioni **equivalenti** di conservativita' di un campo di forze

↓

se e **solo se** le forze in gioco sono conservative

il lavoro puo' essere scritto come :

↓

$$L_{A\to B} = -\Delta U$$

ovvero :

$$L_{A\to B} = -\Delta E_P$$

in coordinate cartesiane si ha : $\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{l} = \int_A^B (F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k})\cdot d\vec{l}$

$$\boxed{\vec{F} = -(\frac{\partial U}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\hat{k})}$$

se si opera in una sola dimensione per es. nel caso si abbia $U(x,y,z) = U(x) \Rightarrow F_y = F_z = 0$

$$\downarrow$$

$$F_x = -\frac{dU(x)}{dx}$$

in una sola dimensione $\frac{\partial U(x)}{\partial x} \Rightarrow \frac{dU(x)}{dx}$

$$\downarrow$$

moltiplicando ambo i membri per dx

$$F_x dx = -\frac{dU(x)}{dx}dx$$

$$\downarrow$$

il differenziale dU di $U(x)$ e' $dU = \frac{dU(x)}{dx}dx$

$$F_x dx = -dU$$

$$\downarrow$$

integrando dal punto A di coordinata x_1 a B di coordinata x_2

$$\int_{x_1}^{x_2} F_x dx = -\int_{x_1}^{x_2} dU$$

$$\downarrow$$

ma in una dimensione $L_{A\to B} = \int_{x_1}^{x_2} \vec{F}\cdot d\vec{l} \equiv \int_{x_1}^{x_2} F_x dx$

$$L_{A\to B} = -\,(U(B) - U(A))$$

<u>Nota Bene</u> : $L_{A\to B} = U(A) - U(B)$ nel caso unidimensionale significa che $\int_{x_1}^{x_2} F_x dx = U(x_1) - U(x_2)$

$$\downarrow$$

ma questo non e' l'integale di Riemann di F_x

$$L = -\Delta U$$

$\int_{x_1}^{x_2} F_x dx = Primitiva\ di\ F_x\ nel\ punto\ x_{\mathbf{2}}$

$-\ Primitiva\ di F_x nel\ punto\ x_1 = U(x_2) - U(x_1)$

$$F_x = -\frac{dU(x)}{dx}$$

significato fisico ?

- una forza conservativa è conseguenza di una ***disuniformita'***

  nella distribuzione dell' energia potenziale nello spazio

caso unidimensionale:

di un dislivello di energia potenziale →

Energia meccanica

per il teorema delle forze vive si ha **sempre**

$$L_{A\to B} = E_C(B) - E_C(A)$$

se le forze in gioco fossero **conservative**

$$L_{A\to B} = E_P(A) - E_P(B)$$

$$E_C(B) - E_C(A) = E_P(A) - E_P(B)$$

riarrangiando i termini

$$E_C(A) + E_P(A) = E_C(B) + E_P(B)$$

$$E_C + E_P = \text{costante}$$

significato fisico ?

se, e solo se, le forze in gioco sono conservative, ossia in assenza di forze "dissipative" esiste una grandezza scalare l' *energia meccanica* E_m

$$E_M = E_C + E_P$$

che si mantiene costante durante il moto

Proprieta' dell'energia

E_m e' la somma di E_C
e dell'energia potenziale E_P
$E_C = \frac{1}{2}mv^2 \rightarrow$ e' sempre > 0
mentre E_P puo' essere ***negativa***

$\Downarrow$

E_m potrebbe anche
essere ***negativa***

in presenza di forze
conservative E_m
e' una costante del moto
E_C ed E_P
possono cambiare
ma la loro somma
deve restare costante
nel tempo

$E_C \rightarrow E_P$ ed $E_P \rightarrow E_C$

$\Downarrow$

l'energia si puo' trasformare
da una forma ad un'altra

in presenza di forze
non conservative
(dissipative → attrito)
E_m *non* e' piu' una costante
del moto ossia
non si conserva
ma verra' dissipata sotto
forma di calore

$\Downarrow$

l'energia e' una grandezza
che si conserva nel tempo
(non si crea ne' si distrugge…..)

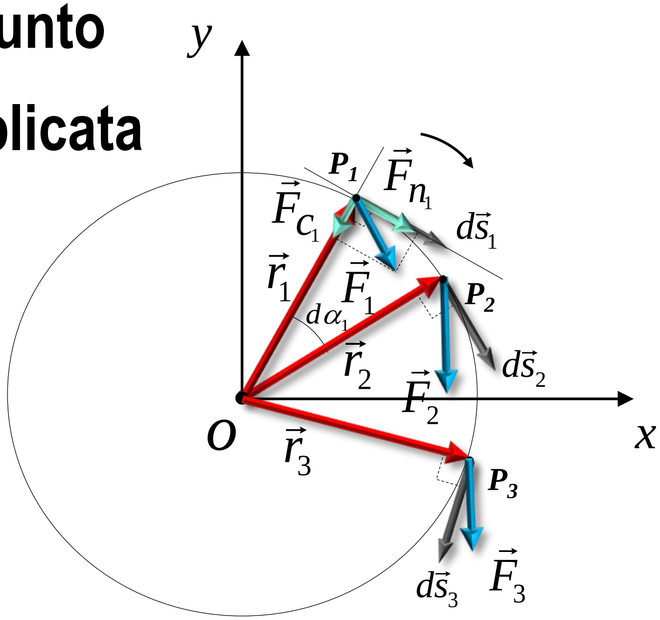
Potenza:

rapidita' di svolgimento del lavoro nel tempo

$$W = \frac{dL}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{l}}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{\mathrm{v}}$$

unita' di misura della potenza nel S.I. e' il Watt

Espressione del lavoro nel moto circolare di un punto materiale in funzione del momento della forza applicata



$$\vec{F} = \vec{F}_n + \vec{F}_c$$

$$dL = \vec{F}_n \cdot d\vec{s} + \cancel{\vec{F}_C \cdot d\vec{s}} = \vec{F}_n \cdot d\vec{s}$$

$$= \left|\vec{F}_n\right| \cdot \left|d\vec{s}\right| \cos\vartheta = F_n ds$$

ma per spostamenti infinitesimi lungo la circonferenza $ds = r d\alpha$

$$L_{AB} = \int_A^B \vec{F}_n \cdot d\vec{s} = \int_{\alpha_A}^{\alpha_B} \left|\vec{F}_n\right| r d\alpha = \int_{\alpha_A}^{\alpha_B} \left|\vec{M}\right| d\alpha$$

Backup slides