Seconda equazione cardinale

per il terzo principio della dinamica le forze interne si manifestano sempre

a coppie di forze di azione e reazione che si esercitano

lungo la stessa direzione quindi

- hanno sempre risultante nulla
- costituiscono sempre una coppia di forze a braccio nullo

ma una coppia di forze a braccio nullo ha sempre momento totale nullo

rispetto a qualsiasi polo

⇨ ad ogni istante il momento risultante delle forze interne

rispetto ad un qualunque polo O_P e' nullo

$$\vec{M}^{\,I}_{R_{O_P}} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\,I} = 0$$

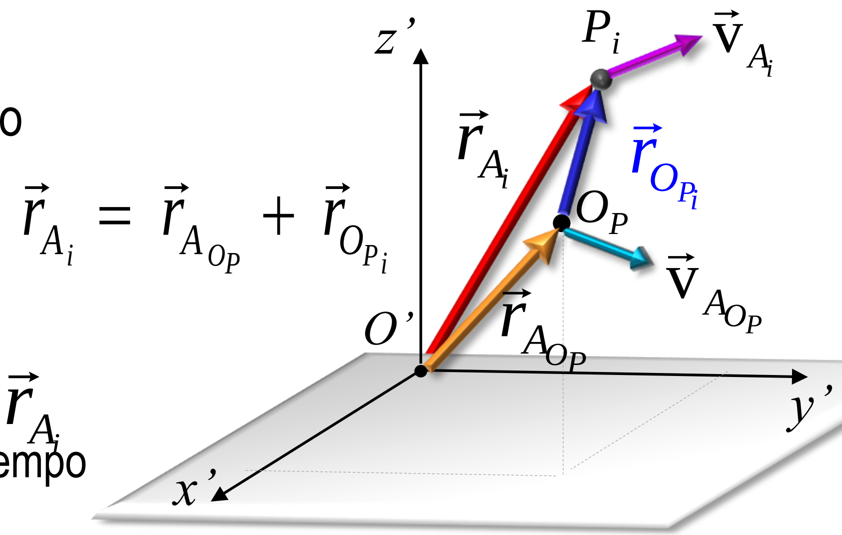
fino ad ora abbiamo sempre determinato il momento angolare

rispetto all'origine O del sistema inerziale o ad un polo O_P fisso

cosa succederebbe se il polo O_P fosse mobile ?

Polo mobile

se il polo O_P fosse in moto con velocita' $\vec{v}_{A_{O_P}}$ rispetto al sistema inerziale fisso S' dato che



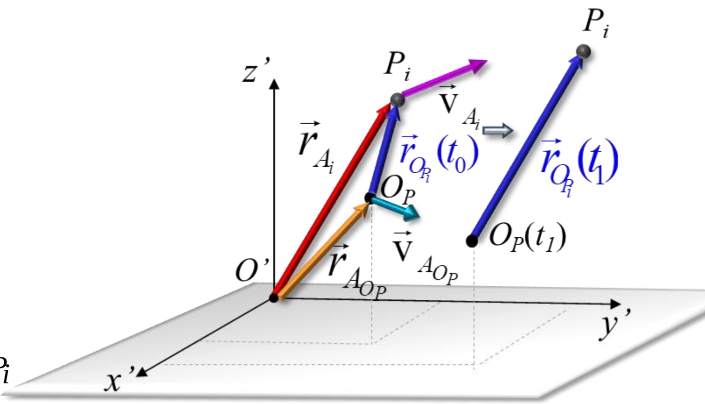
$$\vec{r}_{A_i} = \vec{r}_{A_{O_P}} + \vec{r}_{O_{P_i}}$$

derivando $\vec{r}_{A_i}$ rispetto al tempo

$$\vec{v}_{A_i} = \frac{d\vec{r}_{A_i}}{dt} = \frac{d\vec{r}_{A_{O_P}}}{dt} + \frac{d\vec{r}_{O_{P_i}}}{dt}$$

$$\vec{v}_{A_i} = \vec{v}_{A_{O_P}} + \frac{d\vec{r}_{O_{P_i}}}{dt}$$

ma $\dfrac{d\vec{r}_{O_{P_i}}}{dt} = \vec{v}_{O_{P_i}}$

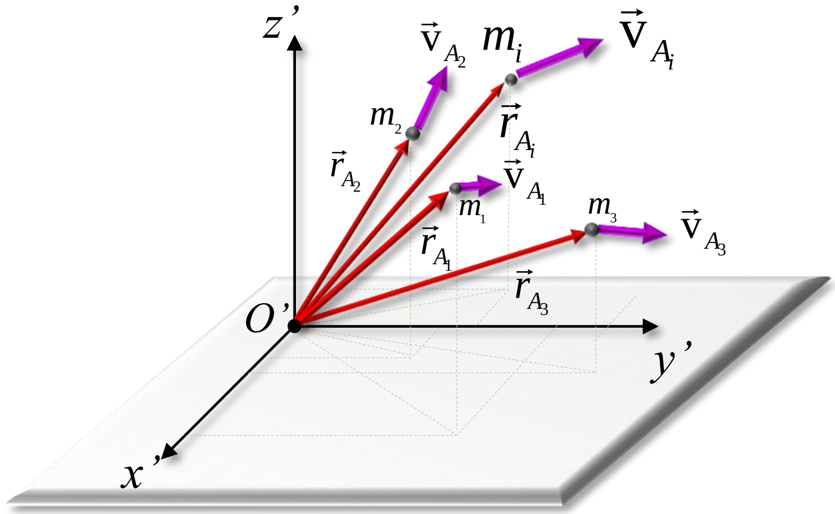


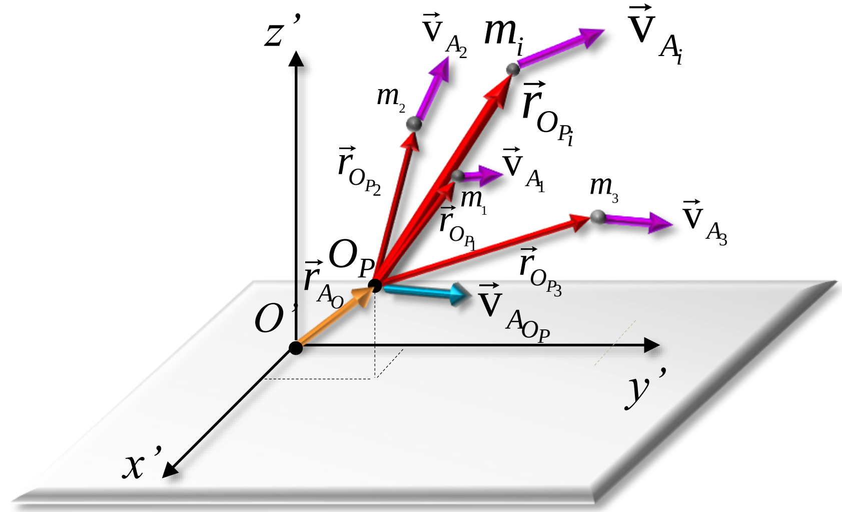
$$\vec{v}_{A_i} = \vec{v}_{A_{O_P}} + \vec{v}_{O_{P_i}}$$

$$\boxed{\vec{v}_{O_{P_i}} = \vec{v}_{A_i} - \vec{v}_{A_{O_P}}}$$

significato ?

la derivata temporale di un vettore che abbia entrambi gli estremi <u>mobili</u> e' uguale alla differenza delle velocita' dei due estremi del vettore





come cambierebbe il momento angolare dell' i-esimo punto P_i se venisse calcolato

rispetto al sistema inerziale O' rispetto al polo mobile O_P

$$\vec{L}_{A_i} = \vec{r}_{A_i} \times m_i \vec{v}_{A_i} \qquad \vec{L}_{O_{P_i}} = \vec{r}_{O_{P_i}} \times m_i \vec{v}_{A_i}$$

Nota bene: le $\vec{v}_{A_i}$ rimangono le stesse

$\downarrow$ $\downarrow$

il momento angolare **totale** $\vec{L}_A$ del sistema di punti rispetto al sistema inerziale O'

il momento angolare **totale** $\vec{L}_{O_P}$ del sistema di punti rispetto al polo mobile O_P

$$\vec{L}_A = \sum_{i=1}^{n} \vec{L}_{A_i} \qquad \vec{L}_{O_P} = \sum_{i=1}^{n} \vec{L}_{O_{P_i}}$$

$$\vec{L}_{O_P} = \sum_{i=1}^{n} \vec{L}_{O_{P_i}}$$

derivando rispetto al tempo il momento angolare totale del sistema di punti

$$\frac{d\vec{L}_{O_P}}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} \vec{L}_{O_{P_i}}$$

per la linearita' dell'operatore derivata

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} \vec{L}_{O_{P_i}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt}\vec{L}_{O_{P_i}}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt}\vec{L}_{O_{P_i}}$$

ma $\vec{L}_{O_{P_i}} = \vec{r}_{O_{P_i}} \times m_i \vec{\mathrm{v}}_{A_i}$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt}(\vec{r}_{O_{P_i}} \times m_i \vec{\mathrm{v}}_{A_i})$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d\vec{r}_{O_{P_i}}}{dt} \times m_i \vec{\mathrm{v}}_{A_i} + \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_{O_{P_i}} \times \frac{d(m_i \vec{\mathrm{v}}_{A_i})}{dt}$$

assumendo che la massa m_i dei punti P_i sia costante nel tempo

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d\vec{r}_{O_{P_i}}}{dt} \times m_i \vec{\mathrm{v}}_{A_i} + \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_{O_{P_i}} \times m_i \frac{d\vec{\mathrm{v}}_{A_i}}{dt}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{d\vec{r}_{O_{P_i}}}{dt}\times m_i\vec{v}_{A_i}+\sum_{i=1}^{n}\vec{r}_{O_{P_i}}\times m_i\frac{d\vec{v}_{A_i}}{dt}$$

ma $\dfrac{d\vec{r}_{O_{P_i}}}{dt}=\vec{v}_{O_{P_i}}$ e $\dfrac{d\vec{v}_{A_i}}{dt}=\vec{a}_{A_i}$

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{v}_{O_{P_i}}\times m_i\vec{v}_{A_i}+\sum_{i=1}^{n}\vec{r}_{O_{P_i}}\times m_i\vec{a}_{A_i}$$

dato che il sistema O' e' inerziale

$m_i\vec{a}_{A_i}=\vec{R}_i=\vec{R}_i^E+\vec{R}_i^I$

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{v}_{O_{P_i}}\times m_i\vec{v}_{A_i}+\sum_{i=1}^{n}\vec{r}_{O_{P_i}}\times(\vec{R}_i^E+\vec{R}_i^I)$$

ma $\vec{v}_{O_{P_i}}=\vec{v}_{A_i}-\vec{v}_{A_{OP}}$

$$\frac{d\vec{L}_{O_P}}{dt}=\sum_{i=1}^{n}(\vec{v}_{A_i}-\vec{v}_{A_{OP}})\times m_i\vec{v}_{A_i}+\sum_{i=1}^{n}\vec{r}_{O_{P_i}}\times(\vec{R}_i^E+\vec{R}_i^I)$$

$$\downarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{v}_{A_i}\times m_i\vec{v}_{A_i}-\sum_{i=1}^{n}\vec{v}_{A_{OP}}\times m_i\vec{v}_{A_i}+\sum_{i=1}^{n}\vec{r}_{O_{P_i}}\times\vec{R}_i^E+\sum_{i=1}^{n}\vec{r}_{O_{P_i}}\times\vec{R}_i^I$$

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{v}_{A_i} \times m_i \vec{v}_{A_i} - \sum_{i=1}^{n} \vec{v}_{A_{O_P}} \times m_i \vec{v}_{A_i} + \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_{O_{P_i}} \times \vec{R}_i^E + \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_{O_{P_i}} \times \vec{R}_i^I$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\vec{v}_{A_i} \times m_i \vec{v}_{A_i} = 0 \qquad - \sum_{i=1}^{n} \vec{v}_{A_{O_P}} \times m_i \vec{v}_{A_i}$$

ad ogni istante il momento risultante delle forze interne rispetto ad un - qualunque - polo O_P e' nullo

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$0 \qquad - \vec{v}_{A_{O_P}} \times \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_{A_i}$$

$$\downarrow$$

ma $\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_{A_i} = \vec{Q}_A$

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{r}_{O_{P_i}} \times \vec{R}_i^I = 0$$

$$\downarrow$$

$$- \vec{v}_{A_{O_P}} \times \vec{Q}_A$$

per le proprieta' del C.M. $\vec{Q}_A = M \vec{v}_{A_{CM}}$

$$0$$

$$- \vec{v}_{A_{O_P}} \times M \vec{v}_{A_{CM}}$$

in conclusione :

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_{O_P}}{dt} = - \vec{v}_{A_{O_P}} \times M \vec{v}_{A_{CM}} + \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_{O_{P_i}} \times \vec{R}_i^E}$$

ma $\sum_{i=1}^{n} \vec{r}_{O_{P\,i}} \times \vec{R}_i^{E} = \vec{M}_{O_P}^{E}$

dove $\vec{M}_{O_P}^{E}$ e' il momento totale risultante delle forze esterne agenti sul sistema di punti calcolato rispetto al polo mobile O_P scelto

quindi $$\frac{d\vec{L}_{O_P}}{dt} = \vec{M}_{O_P}^{E} - \vec{\mathrm{v}}_{A_{O_P}} \times M\vec{\mathrm{v}}_{A_{CM}}$$

se il polo fosse fisso $\vec{\mathrm{v}}_{A_{O_P}} = 0$ e $$\boxed{\frac{d\vec{L}_{O_P}}{dt} = \vec{M}_{O_P}^{E}}$$ **seconda equazione cardinale**

Seconda equazione cardinale

$$\vec{M}^{E}_{O_P} = \frac{d\vec{L}_{O_P}}{dt}$$

<u>rispetto ad un polo fisso</u> ad ogni istante di tempo la derivata temporale del momento della quantita' di moto totale di un sistema di punti materiali e' uguale alla risultante dei momenti di tutte le <u>forze esterne</u> agenti sul sistema di punti

significato fisico ?

la seconda equazione cardinale si ricava imponendo che il momento delle forze interne sia sempre nullo quindi non e' altro che l'estensione a sistemi composti di piu' punti materiali del terzo principio della dinamica se il sistema di punti fosse isolato, ossia se sul sistema **non**

agissero forze esterne → $\vec{M}^{E}_{O_P} = 0$

$$\vec{M}^{E}_{O_P} = \frac{d\vec{L}_{O_P}}{dt} \quad \rightarrow \quad \frac{d\vec{L}_{O_P}}{dt} = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{L}_{O_P} = costante$$

→ conservazione del momento della quantita’ di moto totale del sistema di punti

Principio di conservazione del momento angolare per un sistema di punti materiali

se su di un sistema di punti materiali non agiscono forze esterne (sistema isolato)

il momento angolare totale rimane costante nel tempo in modulo, direzione e verso

e per un sistema di punti materiali il primo principio della dinamica diviene:

- un sistema di punti materiali isolato persiste nel suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme fino a che sul sistema non agiscano forze esterne a risultante non nulla

inoltre

- se il sistema fosse inizialmente in rotazione uniforme rispetto ad un qualsiasi polo fisso, persisterebbe nel suo moto rotatorio uniforme finche' sul sistema non agisca una risultante dei momenti delle forze esterne non nulla il secondo termine nella $\frac{d\vec{L}_{O_P}}{dt} = \vec{M}^E_{O_P} - \vec{v}_{A_{O_P}} \times M\vec{v}_{A_{CM}}$ si annullerebbe

se

$\vec{v}_{A_{O_P}} = 0$ ↓ se il polo O_P fosse fermo rispetto al sistema inerziale

$\vec{v}_{A_{CM}} = 0$ ↓ se il centro di massa fosse in quiete rispetto al sistema inerziale

$\vec{v}_{A_{O_P}} // \vec{v}_{A_{CM}}$ ↓ se la velocita' del polo O_P rispetto al sistema inerziale fosse *parallela* a quella del centro di massa

$\vec{v}_{A_{O_P}} \equiv \vec{v}_{A_{CM}}$ ↓ **se il polo O_P coincidesse con il centro di massa**

Nota Bene: se si facesse coincidere il polo O_P con il centro di massa CM

l'equazione $$\frac{d\vec{L}_{CM}}{dt} = \vec{M}^{E}_{CM}$$ rimarrebbe valida anche se

il centro di massa fosse in moto accelerato rispetto al riferimento inerziale

- **e' evidente che il centro di massa e' un punto " privilegiato "**

  per descrivere il moto del sistema di punti materiali

Backup Slides