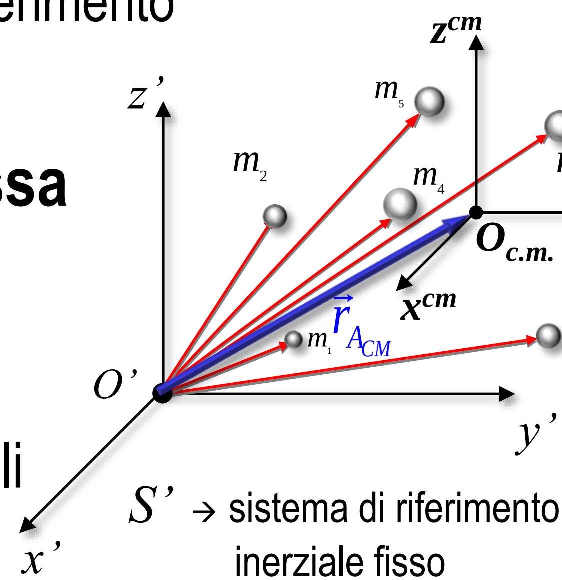
poiche' il centro di massa e' un punto rappresentativo dell' intero sistema di punti materiali

lo utilizzeremo per definire un nuovo sistema di riferimento

Sistema di riferimento del centro di massa

- l'origine e' istante per istante collocata nel centro di massa del sistema di punti materiali



$$\vec{r}_{A_{CM}} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_{A_i}}{\sum_{i=1}^{N} m_i}$$

$$O_{CM} \equiv C.M.$$

- gli assi mantengono sempre lo stesso orientamento rispetto agli assi fissi

in altri termini il sistema di riferimento del centro di massa non e' in rotazione

rispetto al sistema di riferimento inerziale fisso → $\vec{\omega}_{A_{CM}} = 0$

→ si assume che abbia assi sempre paralleli agli assi fissi

→ tutte le grandezze riferite al sistema

del $C.M.$ invece che con il pedice R

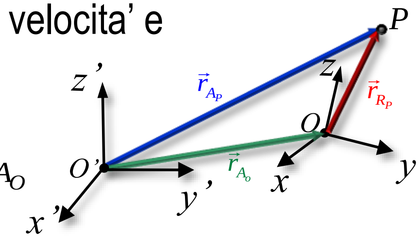
saranno indicate con l'apice ^{scm}

$$\vec{v}_{A_P} = \vec{v}_{R_P} + \vec{v}_{A_O} + \vec{\omega}_A \times \vec{r}_{R_P}$$

↓

$$\vec{v}_{A_P} = \vec{v}_P^{\,scm} + \vec{v}_{A_{CM}} + \vec{\omega}_{A_{CM}} \times \vec{r}_P^{\,scm}$$

trasformazione della velocita' e dell' accelerazione



- $\vec{r}_{A_P} = \vec{r}_{R_P} + \vec{r}_{A_O}$
- $\vec{v}_{A_P} = \vec{v}_{R_P} + \vec{v}_T$

  dove $\vec{v}_T = \vec{v}_{A_O} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{R_P}$
- $\vec{a}_{A_P} = \vec{a}_{R_P} + \vec{a}_T + \vec{a}_C$

  dove $\vec{a}_C = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{R_P}$

  e $\vec{a}_T = \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_{R_P} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{R_P}) + \vec{a}_{A_O}$

se $\vec{\omega}_{A_{CM}} = 0$ → $\dot{\vec{\omega}}_{A_{CM}} = 0$

→ $\vec{a}_C = 2\vec{\omega}_{A_{CM}} \times \vec{v}_{R_P} = 0$

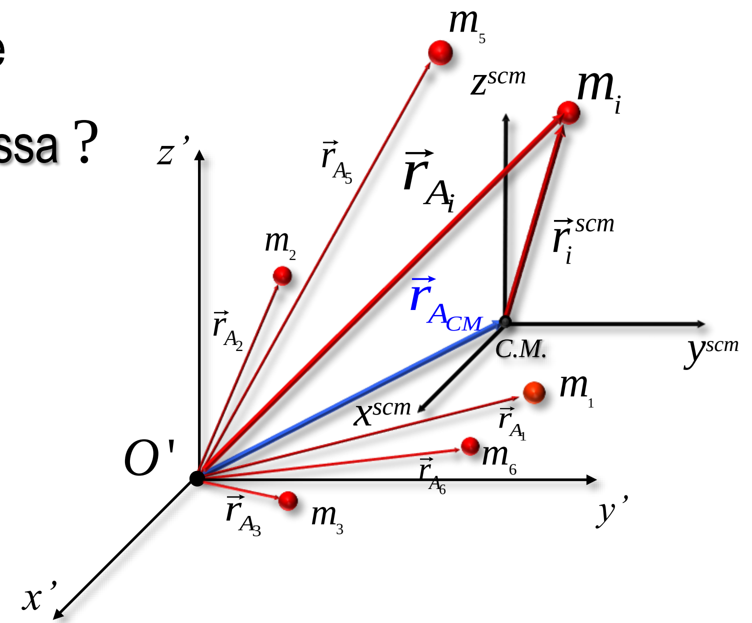
→ $\vec{\omega}_{A_{CM}} \times (\vec{\omega}_{A_{CM}} \times \vec{r}_{R_P}) = 0$

→

$$\vec{v}_{A_P} = \vec{v}_P^{\,scm} + \vec{v}_{A_{CM}}$$

$$\vec{a}_{A_P} = \vec{a}_P^{\,scm} + \vec{a}_{A_{CM}}$$

Nota Bene: in generale $\vec{a}_{A_{CM}} \neq 0$ → il sistema del centro di massa **non e'** un sistema inerziale che relazione intercorre tra il momento angolare totale del sistema di punti materiali rispetto al **sistema inerziale** ed il momento angolare totale calcolato rispetto al sistema di riferimento del **centro di massa** ?



Teoremi di Konig

il momento angolare totale $\vec{L}_A$ del sistema di punti

rispetto all'origine O' del sistema

di riferimento inerziale fisso e'
$$\vec{L}_A = \sum_{i=1}^{n} \vec{L}_{A_i} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_{A_i} \times m_i \vec{\mathrm{v}}_{A_i}$$

ma $\vec{r}_{A_i} = \vec{r}_i^{\,scm} + \vec{r}_{A_{CM}}$ e $\vec{\mathrm{v}}_{A_i} = \vec{\mathrm{v}}_i^{\,scm} + \vec{\mathrm{v}}_{A_{CM}}$

$$\vec{L}_A = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_{A_i} \times m_i \vec{\mathrm{v}}_{A_i}$$

dato che $\vec{r}_{A_i} = \vec{r}_i^{\,scm} + \vec{r}_{A_{CM}}$

e che $\vec{\mathrm{v}}_{A_i} = \vec{\mathrm{v}}_i^{\,scm} + \vec{\mathrm{v}}_{A_{CM}}$

$$\vec{L}_A = \sum_{i=1}^{n} (\vec{r}_i^{\,scm} + \vec{r}_{A_{CM}}) \times m_i (\vec{\mathrm{v}}_i^{\,scm} + \vec{\mathrm{v}}_{A_{CM}})$$

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i^{\,scm} \times m_i \vec{\mathrm{v}}_i^{\,scm} + \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i^{\,scm} \times m_i \vec{\mathrm{v}}_{A_{CM}} + \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_{A_{CM}} \times m_i \vec{\mathrm{v}}_i^{\,scm} + \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_{A_{CM}} \times m_i \vec{\mathrm{v}}_{A_{CM}}$$

momento angolare totale del sistema di punti materiali rispetto al sistema di riferimento del centro di massa

momento angolare totale del centro di massa rispetto al sistema di riferimento inerziale fisso

$$\boxed{\vec{L}_A} = \boxed{\vec{L}^{scm}} + \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i^{\,scm} \times m_i \vec{\mathrm{v}}_{A_{CM}} + \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_{A_{CM}} \times m_i \vec{\mathrm{v}}_i^{\,scm} + \boxed{\vec{L}_{A_{CM}}}$$

ma $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i^{\,scm} \times m_i \vec{\mathrm{v}}_{A_{CM}} = ?$ e $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \vec{r}_{A_{CM}} \times m_i \vec{\mathrm{v}}_i^{\,scm} = ?$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i^{\,scm} \times m_i \vec{v}_{A_{CM}}}$$

$$\downarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i^{\,scm} \times \vec{v}_{A_{CM}}$$

moltiplicando e dividendo per $M = \sum_{i=1}^{n} m_i$

$$M \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i^{\,scm}}{M} \times \vec{v}_{A_{CM}}$$

ma $\vec{r}_{CM} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{M}$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i^{\,scm}}{M} \rightarrow$$ posizione del $C.M.$ rispetto al sistema del centro di massa stesso

$$\Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i^{\,scm}}{M} = 0$$

$$\downarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i^{\,scm} \times m_i \vec{v}_{A_{CM}} = 0$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \vec{r}_{A_{CM}} \times m_i \vec{v}_i^{\,scm}}$$

$$\downarrow$$

$$\vec{r}_{A_{CM}} \times \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i^{\,scm}$$

$$M\vec{r}_{A_{CM}} \times \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i^{\,scm}}{M}$$

ma $\vec{v}_{CM} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i}{M} = \dfrac{\vec{Q}_A}{M} \Rightarrow \vec{Q}_A = M\vec{v}_{A_{CM}}$

$$\downarrow$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i^{\,scm}}{M} = \vec{Q}^{scm} \rightarrow$$ quantita' di moto del $C.M.$ rispetto al sistema del centro di massa stesso

$$\Rightarrow \vec{Q}^{scm} = M\vec{v}^{\,scm}_{CM} = 0$$

$$\downarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{r}_{A_{CM}} \times m_i \vec{v}_i^{\,scm} = 0$$

$$\vec{L}_A = \vec{L}_{A_{CM}} + \vec{L}^{scm}$$

primo teorema di Konig (teorema di Konig per il momento angolare)

il momento angolare totale del sistema di punti nel sistema inerziale

e' la somma vettoriale del momento angolare dovuto al moto del $C.\ M.$

rispetto al sistema di riferimento inerziale

e del momento angolare totale dovuto al moto del sistema di punti

rispetto al $C.\ M.$ del sistema stesso

Secondo teorema di Konig (teorema di Konig per l'energia cinetica)

energia cinetica totale del sistema di punti nel sistema di riferimento inerziale fisso $\Rightarrow$ $$E_{C_A} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \mathrm{v}_{A_i}^2$$

dato che $\vec{\mathrm{v}}_{A_i} = \vec{\mathrm{v}}_i^{scm} + \vec{\mathrm{v}}_{A_{CM}}$

$$\downarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i (\vec{\mathrm{v}}_i^{scm} + \vec{\mathrm{v}}_{A_{CM}})^2$$

ma $\mathrm{v}^2 = \vec{\mathrm{v}} \cdot \vec{\mathrm{v}}$

$$\downarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i (\vec{\mathrm{v}}_i^{scm} + \vec{\mathrm{v}}_{A_{CM}})^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i (\vec{\mathrm{v}}_i^{scm} + \vec{\mathrm{v}}_{A_{CM}}) \cdot (\vec{\mathrm{v}}_i^{scm} + \vec{\mathrm{v}}_{A_{CM}})$$

$$\downarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i (\vec{\mathrm{v}}_i^{scm} \cdot \vec{\mathrm{v}}_i^{scm} + \vec{\mathrm{v}}_{A_{CM}} \cdot \vec{\mathrm{v}}_i^{scm} + \vec{\mathrm{v}}_i^{scm} \cdot \vec{\mathrm{v}}_{A_{CM}} + \vec{\mathrm{v}}_{A_{CM}} \cdot \vec{\mathrm{v}}_{A_{CM}})$$

$$\downarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i ({\mathrm{v}_i^{scm}}^2 + 2\vec{\mathrm{v}}_i^{scm} \cdot \vec{\mathrm{v}}_{A_{CM}} + \mathrm{v}_{A_{CM}}^2)$$

$$\downarrow$$

$$E_{C_A} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i {\mathrm{v}_i^{scm}}^2 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \mathrm{v}_{A_{CM}}^2 + \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\mathrm{v}}_i^{scm} \cdot \vec{\mathrm{v}}_{CM}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_i {\mathrm{v}_i^{scm}}^2$$

$$\downarrow$$

energia cinetica totale del sistema di punti rispetto al sistema del centro di massa

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_i \mathrm{v}_{A_{CM}}^2$$

$$\downarrow$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{v}_{A_{CM}}^2\sum_{i=1}^{n}m_i$$

$$\downarrow$$

$$\frac{1}{2}M\mathrm{v}_{A_{CM}}^2$$

$$\downarrow$$

energia cinetica di un punto materiale di massa pari alla massa totale M del sistema di punti che si muova' rispetto al sistema inerziale con la stesssa velocita $\mathrm{v}_{A_{CM}}^2$ del centro di massa

→ energia cinetica del $C.M.$ rispetto al sistema inerziale

$$\sum_{i=1}^{n}m_i \ \vec{\mathrm{v}}_i^{scm}\cdot\vec{\mathrm{v}}_{ACM}$$

$$\downarrow$$

$$\vec{\mathrm{v}}_{A_{CM}}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{\mathrm{v}}_i^{scm}\right)$$

$$\downarrow$$

$$\vec{\mathrm{v}}_{A_{CM}}\cdot\vec{Q}^{scm}$$

$$\downarrow$$

ma $\vec{Q}^{scm}$ e'quantita' di moto totale del $C.M.$ rispetto a se stesso

$$\downarrow$$

$$\vec{Q}^{scm} = 0$$

$$\downarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n}m_i \ \vec{\mathrm{v}}_i^{scm}\cdot\vec{\mathrm{v}}_{ACM} = 0$$

quindi

$$\boxed{E_{C_A} = E_C^{\,scm} + E_{C_{A_{CM}}}}$$

secondo teorema di Konig

(teorema di Konig per l'energia cinetica)

l'energia cinetica totale del sistema di punti rispetto al sistema inerziale

e' uguale alla somma

- dell'energia cinetica dei punti del sistema rispetto al centro di massa
- e dell'energia cinetica del centro di massa rispetto al sistema inerziale

riassumendo: il centro di massa di un sistema di punti materiali

e' un punto rappresentativo del sistema di punti nel quale si puo' pensare

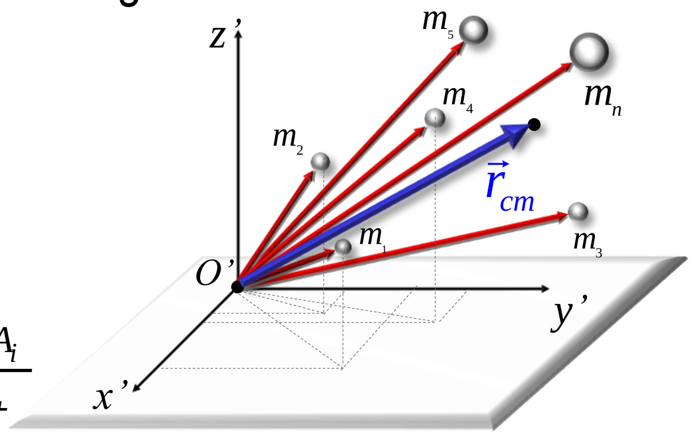
sia concentrata tutta la massa e su cui si applica la risultante delle forze esterne

ma per il momento angolare totale e l'energia cinetica totale del sistema di punti

non e' sufficiente conoscere la quantita' di moto e la risultante delle forze esterne,

ossia il moto del centro di massa rispetto al sistema inerziale, ma bisogna

tenere anche conto del moto del sistema di punti rispetto al centro di massa per ogni punto P_i di un sistema di punti materiali di massa m_i ciascuno si introducono le grandezze



S' → sistema di riferimento inerziale fisso

$$m_i$$

$$\vec{r}_{A_i}$$

$$\vec{v}_{A_i} = \frac{d\vec{r}_{A_i}}{dt}$$

$$\vec{a}_{A_i} = \frac{d\vec{v}_{A_i}}{dt}$$

$$\vec{q}_{A_i} = m_i \vec{v}_{A_i}$$

$$\vec{L}_{A_i} = \vec{r}_{A_i} \times m_i \vec{v}_{A_i}$$ (rispetto all'origine o rispetto al polo fisso prescelto)

$$E_{C_{A_i}} = \frac{1}{2} m_i v_{A_i}^2$$

$\vec{F}_i^{\,E}$ e $\vec{F}_{ji}^{\,I}$

relativamente all'insieme di **tutti** i punti costituenti il sistema di punti materiali si introducono le grandezze

$$M = \sum_{i=1}^{n} m_i$$

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_{A_i}}{M}$$

$$\vec{v}_{CM} = \frac{d\vec{r}_{CM}}{dt}$$

$$\vec{a}_{CM} = \frac{d\vec{v}_{CM}}{dt}$$

$$\vec{Q} = \sum_{i=1}^{n} \vec{q}_{A_i}$$

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i$$

$$E_C = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_{A_i}^2$$

$$\vec{R}^E = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{\,E}$$ e $$\vec{R}^I = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \vec{F}_{ji}^{\,I} + \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} \vec{F}_{ij}^{\,I}$$

espresse in funzione di

$\vec{r}_{CM}$ e $\vec{v}_{CM}$

$$\boxed{\vec{Q} = M\vec{v}_{CM}}$$

$$\boxed{\vec{L} = \vec{L}_{CM} + \vec{L}^{scm}}$$

$$\boxed{E_C = E_{C_{CM}} + E_C^{\,scm}}$$

Backup Slides