Cinematica dei corpi rigidi

una terna di riferimento S' definita dai versori $\hat{i}'$ $\hat{j}'$ $\hat{k}'$ e' **fissa** nello *spazio*

mentre una terna cartesiana ortogonale S definita dai versori $\hat{i}(t)$ $\hat{j}(t)$ $\hat{k}(t)$

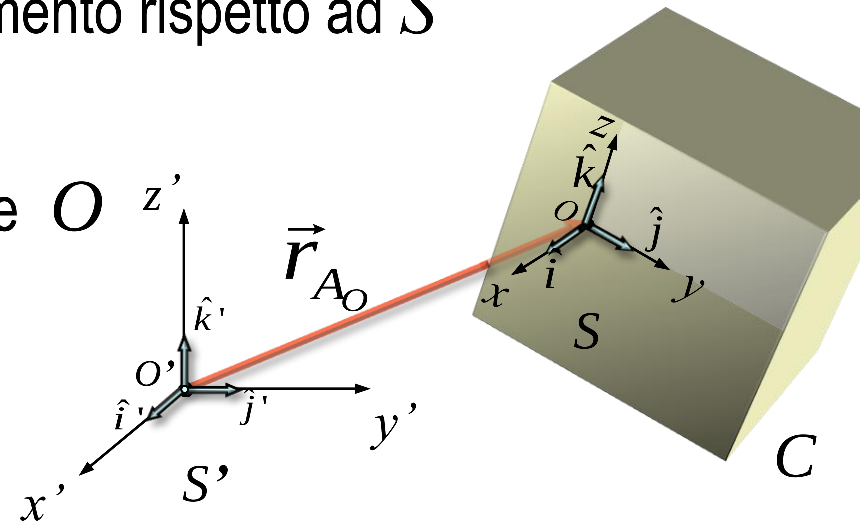
e' **solidale** con un corpo rigido C in movimento rispetto ad S'

il vettore $\vec{r}_{A_O}$ fornisce la posizione dell'origine O

della terna S rispetto ad O'

il suo modulo $r_{A_O} = \left|\vec{r}_{A_O}\right|$

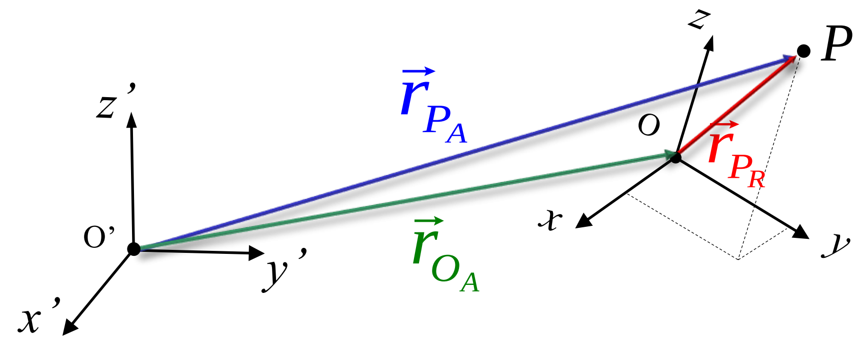
fornisce la distanza tra O' ed O



in generale : $\vec{r}_{P_A} = \vec{r}_{P_R} + \vec{r}_{O_A}$ $\quad \vec{v}_{P_A} = \cancel{\vec{v}_{P_R}} + \vec{v}_{O_A} + \vec{\omega}_A \times \vec{r}_{P_R}$

$$\vec{a}_{P_A} = \cancel{\vec{a}_{P_R}} + \dot{\vec{\omega}}_A \times \vec{r}_{P_R} + \vec{\omega}_A \times (\vec{\omega}_A \times \vec{r}_{P_R}) + \vec{a}_{O_A} + \cancel{2\vec{\omega}_A \times \vec{v}_{P_R}}$$

Cinematica dei corpi rigidi



per via del *vincolo di rigidita'*

$$\left| \vec{r}_{P_{i_R}} \right| = r_{P_{i_R}} = cost_i \quad \forall i \quad \text{e} \quad \forall t$$

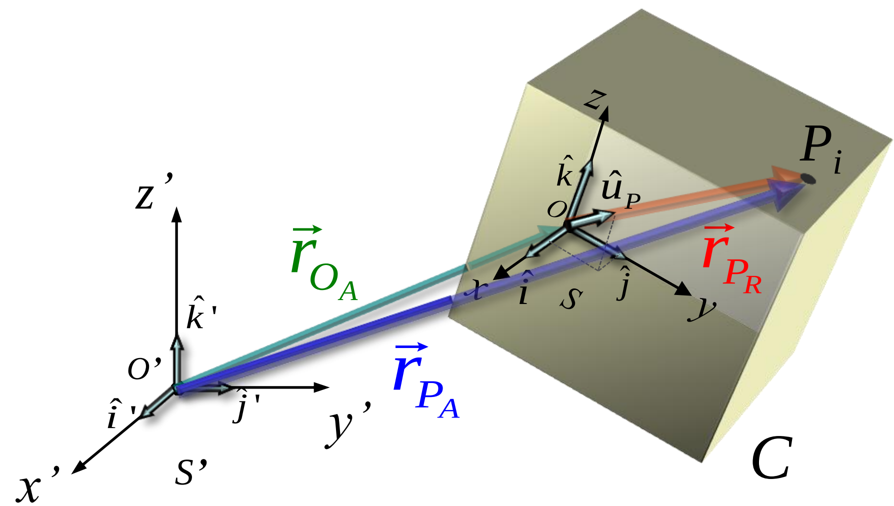
$$\downarrow$$

$$\vec{v}_{P_{i_R}} = \vec{a}_{P_{i_R}} = 0$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\vec{r}_{P_{i_A}} = \vec{r}_{P_{i_R}} + \vec{r}_{O_A}}$$

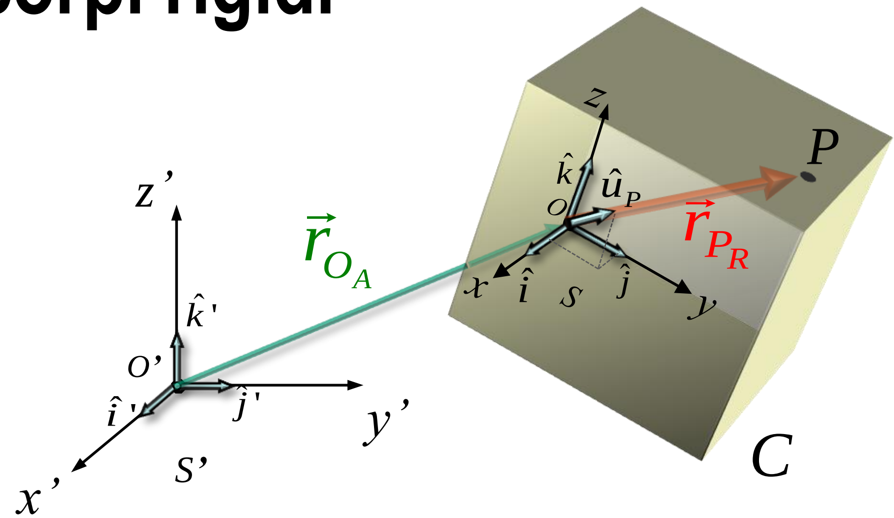
$$\boxed{\vec{v}_{P_{i_A}} = \vec{v}_{O_A} + \vec{\omega}_A \times \vec{r}_{P_{i_R}}}$$



$$\boxed{\vec{a}_{P_{i_A}} = \dot{\vec{\omega}}_A \times \vec{r}_{P_{i_R}} + \vec{\omega}_A \times (\vec{\omega}_A \times \vec{r}_{P_{i_R}}) + \vec{a}_{O_A}}$$

Cinematica traslazionale dei corpi rigidi

Moto traslatorio di un corpo rigido



per via del *vincolo di rigidita'* la velocita'

di *ogni punto* del corpo rigido in moto

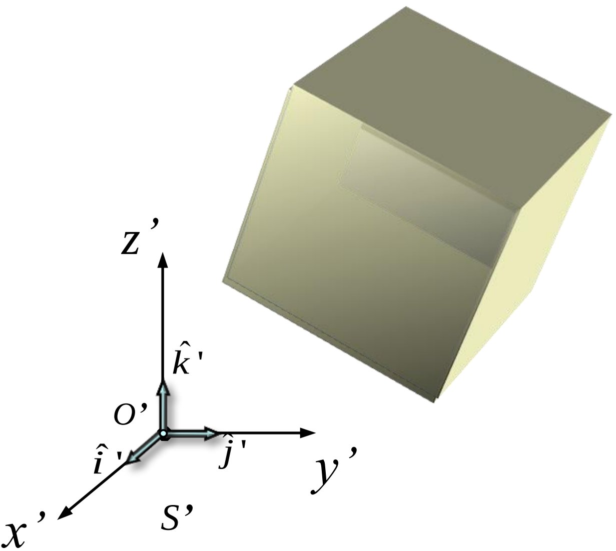
puramente *traslatorio* rispetto ad S' *e' la stessa* per tutti i punti del corpo

➢ la velocita' di un generico punto P la cui posizione rispetto ad S e' fornita

dal vettore $\vec{r}_{P_R}$ *sara'* $\vec{v}_{P_A} \equiv \vec{v}_{O_A} = \dfrac{d\vec{r}_{O_A}}{dt}$ per tutti i punti del corpo rigido

dove $\vec{v}_{O_A}$ e' la velocita' dell'origine O del sistema mobile S rispetto ad O'

esempio:

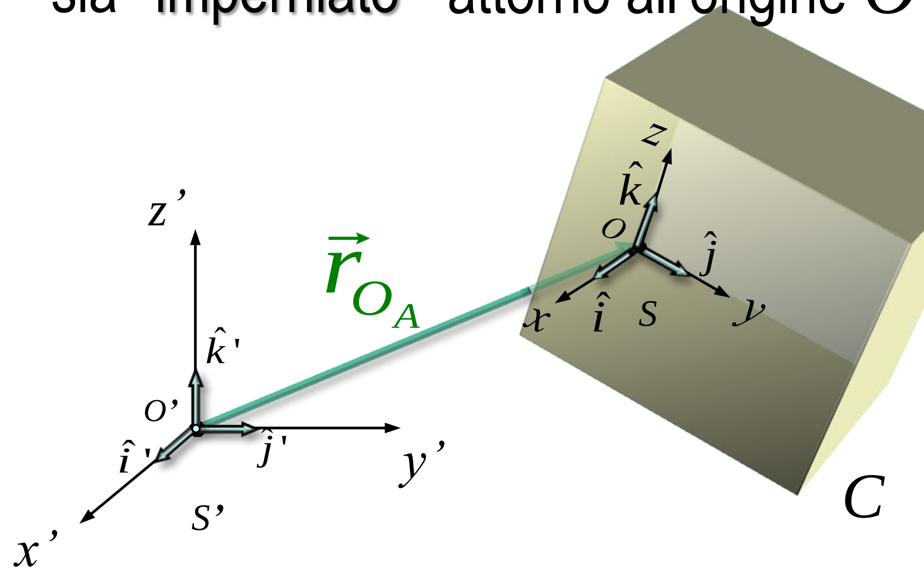


→ Nota bene: la traiettoria potrebbe anche essere curvilinea

Cinematica <u>rotazionale</u> dei corpi rigidi

inizialmente supporremo che il corpo rigido sia "imperniato" attorno all'origine O

in altri termini supporremo



che il vettore $\vec{r}_{O_A}$ sia <u>fisso</u> nel tempo,

anche in direzione e in verso oltre che in modulo si dimostra che esiste un vettore $\vec{\omega} = \omega_1 \hat{i} + \omega_2 \hat{j} + \omega_3 \hat{k}$

dove: $\omega_1 = \frac{d\hat{j}}{dt} \cdot \hat{k}$ $\omega_2 = \frac{d\hat{k}}{dt} \cdot \hat{i}$ $\omega_3 = \frac{d\hat{i}}{dt} \cdot \hat{j}$

che descrive il comportamento di rotazione del corpo rigido

in particolare risulta che

$$\frac{d\hat{i}}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{i} \qquad \frac{d\hat{j}}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{j} \qquad \frac{d\hat{k}}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{k}$$

formule di Poisson

inoltre si puo’ dimostrare che:

dato un corpo rigido in movimento ed un versore $\hat{u}$ direzionato

in modo qualsiasi nello spazio, ma solidale con il corpo rigido,

esiste sempre un vettore $\vec{\omega}$ tale che il prodotto vettoriale tra $\vec{\omega}$ ed $\hat{u}$

fornisce la derivata rispetto al tempo del versore $\hat{u}$ stesso

$$\frac{d\hat{u}}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{u}$$

se il corpo rigido e' "imperniato" attorno all'origine O

la velocita' del generico punto P del corpo rigido sara'

$$\vec{\mathrm{v}}_{P_{i_A}} = \vec{\omega}_A \times \vec{r}_{P_{i_R}}$$

in generale se anche il punto O si sta spostando nello spazio con velocita' $\vec{\mathrm{v}}_{O_A}$

la velocita' del generico punto P del corpo rigido sara'

$$\boxed{\vec{\mathrm{v}}_{P_{i_A}} = \vec{\mathrm{v}}_{O_A} + \vec{\omega}_A \times \vec{r}_{P_{i_R}}}$$

Backup Slides