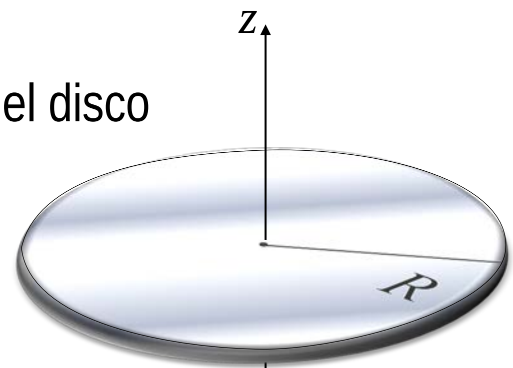
Determinare il momento d'inerzia di un disco rispetto ad un asse perpendicolare al piano del disco passante per il suo centro. Il disco ha spessore trascurabile, massa totale M, raggio R e densita' superficiale di massa σ costante.



il momento d'inerzia $I_z = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$ dove r e' la distanza dall'asse del disco

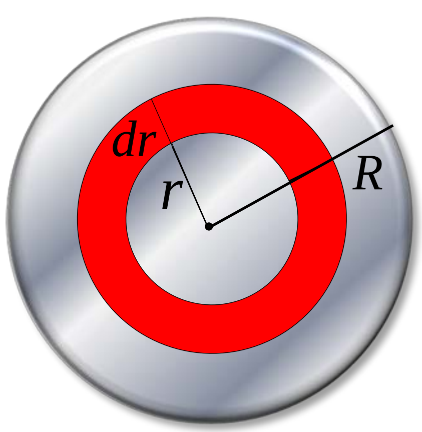
diverra' $I_z = \int r^2 dm$ con $dm = \sigma dS$

lo spessore del disco e' trascurabile → il problema e' bidimensionale

→ avremo a che fare con un integrale doppio come variabili utilizziamo le coordinate polari piane

dividiamo il disco in corone concentriche infinitesime (anelli) di raggio r con $0 < r < R$

vista dall'alto



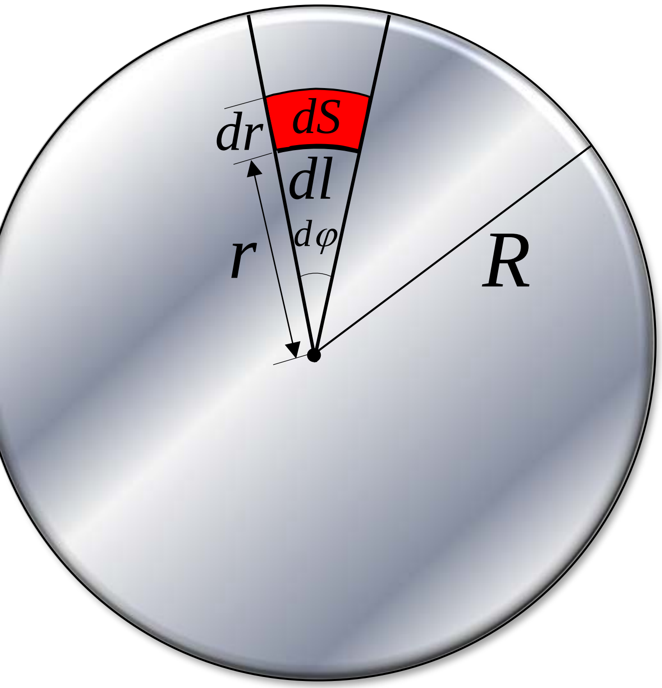
suddividiamo ulteriormente la la corona in aree infinitesime

$$dS \approx dr \cdot dl$$

$$dl = r d\varphi$$

$$\Rightarrow \quad dS \approx r dr \, d\varphi$$

$$0 \le r \le R$$
$$0 \le \varphi < 2\pi$$



$$I_z = \int r^2 dm$$

$dm = \sigma dS$ e $dS \approx r dr\, d\varphi$

$$\iint r^2 \sigma\, r dr\, d\varphi$$

$\sigma = costante$

$$\sigma \iint r^3 dr\, d\varphi$$

$0 \le r \le R$
$0 \le \varphi < 2\pi$

$$\sigma \int_0^R \int_0^{2\pi} r^3 dr d\varphi$$

ma r e φ sono indipendenti tra loro e l'integrale doppio fattorizza

$$\sigma \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$2\pi\sigma \int_0^R r^3 dr$$

Determinazione di σ :

$$2\pi\sigma \frac{1}{4} r^4 \Big|_0^R = \frac{2\pi\sigma}{4} R^4 \rightarrow I_z = \frac{1}{2}\pi\sigma R^4$$

la superficie del disco e' $S = \pi R^2$ e dato che la massa e' distribuita in maniera uniforme

sul disco $\sigma = \dfrac{M}{S} = \dfrac{M}{\pi R^2}$ per cui $I_z = \dfrac{1}{2}\pi R^4 \dfrac{M}{\pi R^2}$

in conclusione il momento d'inerzia del disco rispetto all'asse z e' : $I_z = \dfrac{1}{2} M R^2$

Backup Slides