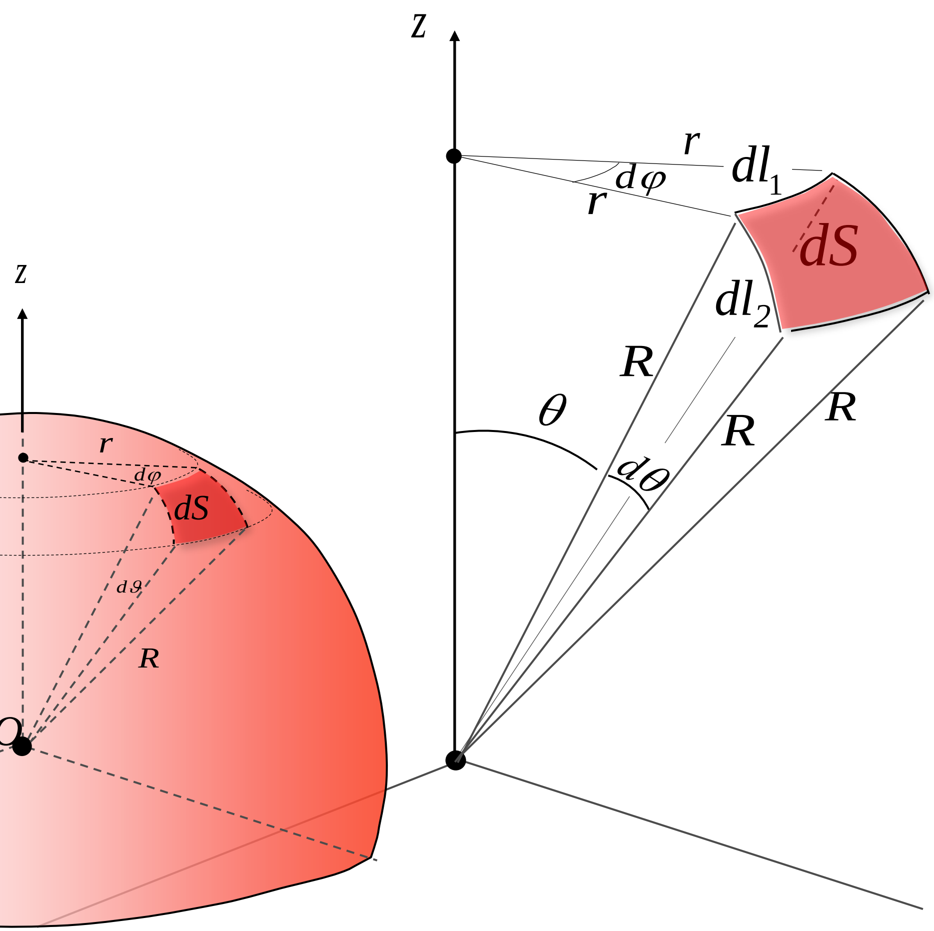
Determinare il momento d'inerzia di un sottile guscio sferico omogeneo di raggio R, massa totale M e di densita' superficiale di massa σ <u>costante</u> rispetto ad un asse passante per il centro del guscio.

guscio sottile → problema bidimensionale → integrale doppio

per la simmetria del problema opereremo in coordinate polari sferiche → se dS e' una porzione infinitesima di superficie del guscio sferico $dS \approx dl_1 \cdot dl_2$ dove $dl_1 = r d\varphi$ e $dl_2 = R d\vartheta$

⇨ $dS \approx R d\vartheta \; r d\varphi$ il momento d'inerzia I_z e' $I_z = \int r^2 dm$



$$I_z = \int r^2 dm$$

$dm = \sigma dS$

$dS \approx R d\vartheta \; r d\varphi$

$$\iint r^2 \sigma \; R d\vartheta \; r d\varphi$$

$\sigma = costante$

$R = costante$

$$\sigma R \iint r^3 d\vartheta d\varphi$$

$r = R sen\vartheta$

$$\sigma R^4 \iint sen^3\vartheta d\vartheta d\varphi$$

$[\, 0 \le \theta \le \pi \,]$

$[\, 0 \le \varphi < 2\pi \,]$

$$\sigma R^4 \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} sen^3\vartheta d\vartheta d\varphi$$

ma θ e φ sono indipendenti tra loro e l'integrale doppio fattorizza

$$\sigma R^4 \int_0^{\pi} sen^3\vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$\sigma R^4 \int_0^{\pi} sen^3\vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$2\pi\sigma R^4 \int_0^{\pi} sen^3\vartheta d\vartheta$$

ma $\int_0^{\pi} sen^3\vartheta d\vartheta$

$$= -\int_1^{-1}(1-\cos^2\vartheta)d\cos\vartheta = \frac{4}{3}$$

$$I_z = \frac{8}{3}\pi\sigma R^4$$

Determinazione di σ :

la superficie del guscio e' $S = 4\pi R^2$ e dato che la massa e' distribuita in maniera <u>uniforme</u>

sul guscio sferico $\sigma = \frac{M}{S} = \frac{M}{4\pi R^2}$ per cui $I_z = \frac{8}{3}\pi\sigma R^4 = \frac{8}{3}\pi\frac{M}{4\pi R^2}R^4 = \frac{2}{3}MR^2$

in conclusione il momento d'inerzia rispetto all'asse z e' $I_z = \dfrac{2}{3}MR^2$

Backup Slides