

Una sfera piena omogenea di massa m e raggio r e' posta sopra un piano
orizzontale scabro inizialmente la sfera e' ferma
successivamente viene applicato un impulso orizzontale \vec{J}
la cui retta d'azione passa per il centro della sfera.
Determinare, trascurando l'attrito statico, il moto della sfera
(gioco del biliardo con stecca)

la forza di attrito non reagisce impulsivamente perciò la sfera non è vincolata

quindi applicando il teorema dell'impulso si può ottenere immediatamente

la velocità iniziale del centro di massa nell'istante immediatamente successivo

all'azione dell'impulso

➤ per il teorema dell'impulso $\vec{J} = \Delta \vec{q}$

➤ sfruttando le proprietà del centro di massa $\vec{V}_{CM} = \frac{\vec{Q}}{M}$

visto che la sfera era inizialmente ferma si ha

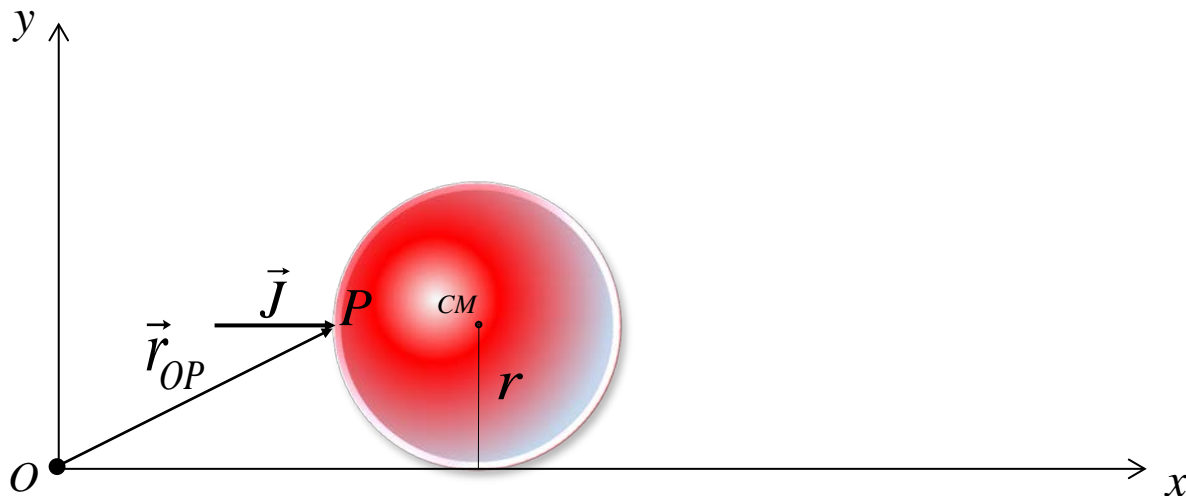
$$\vec{J} = m \vec{v}_{cm}(0) \quad \text{da cui in modulo} \quad v_{cm}(0) = \frac{J}{m}$$

dove \mathbf{J} e $\mathbf{v}_{cm}(0)$ sono i moduli dei corrispondenti vettori

se assumiamo come polo fisso l'origine O di un sistema di coordinate

cartesiane xy solidale con il piano del biliardo si avra'

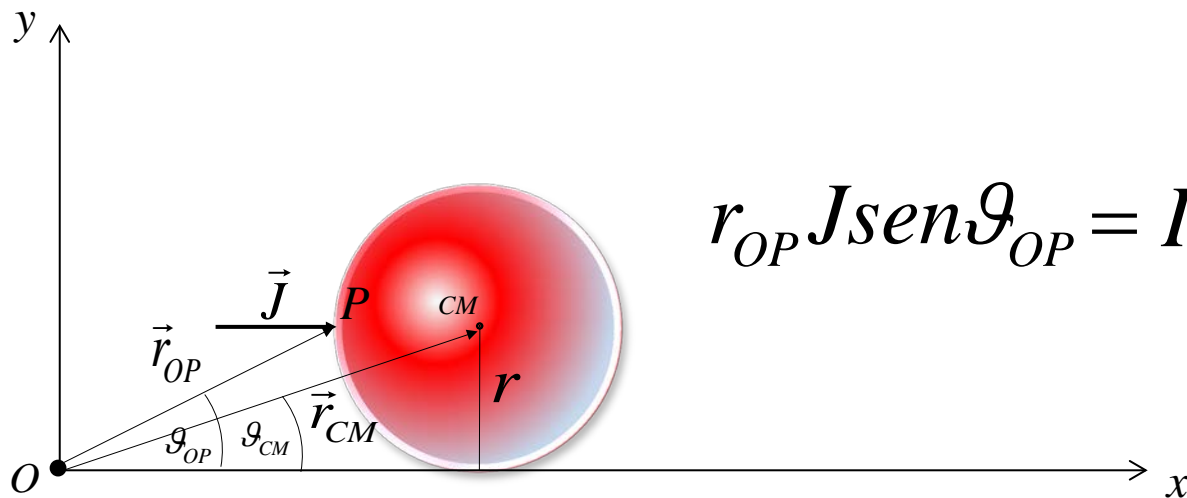
$$\vec{L}_O = \vec{r}_{OP} \times \vec{J}$$



per il teorema di König del momento angolare $\vec{L}_O = \vec{L}' + \vec{r}_{CM} \times m\vec{v}_{CM}$

dato che $m\vec{v}_{cm}(0) = \vec{J} \Rightarrow \vec{L}_O(t=0) = \vec{L}' + \vec{r}_{CM} \times \vec{J}$ in modulo

$$|\vec{L}_O| = r_{OP} J \sin \vartheta_{OP} \quad \text{e} \quad |\vec{r}_{CM} \times \vec{J}| = r_{CM} J \sin \vartheta_{CM} \quad \text{quindi}$$



$$r_{OP} J \sin \vartheta_{OP} = I_C \omega + r_{CM} J \sin \vartheta_{CM}$$

ma $r_{OP} \sin \vartheta_{OP} = r_{CM} \sin \vartheta_{CM} = r$ per cui $rJ = I_C \omega + rJ$

$\Rightarrow I_C \omega = 0$ ossia $\omega = 0$ quindi la sfera inizialmente inizia

a strisciare con velocità $v_{cm} = \frac{J}{m}$ senza rotolare

successivamente per effetto del momento della forza di attrito volvente

comincerà a rotolare oltre che a strisciare



Nota Bene : si e' trascurato l'attrito statico, che nell'istante dell'urto contribuirà anche'esso a far ruotare le palla da biliardo

la forza di attrito dinamico ha modulo $\mu_d mg$ e si oppone al moto

quindi $ma_{CM} = -\mu_d mg \Rightarrow a_{CM} = -\mu_d g$

$$v_{CM}(t) = v_{CM}(0) - \mu_d gt = \frac{J}{m} - \mu_d gt$$

per avere informazioni sul moto di rotazione conviene riferirsi al sistema del centro di massa

assumendo come polo il centro di massa e applicando la seconda

equazione cardinale

$$\mu_d mgr = I_{CM} \alpha = \frac{2}{5} mr^2 \alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{5}{2} \mu_d \frac{g}{r}$$

da cui

$$\omega(t) = \alpha t = \frac{5}{2} \mu_d \frac{g}{r} t$$

ricapitolando

$$\omega(0) = 0 \quad \text{e} \quad v_{cm}(0) = \frac{J}{m}$$
$$\omega(t) = \frac{5}{2} \mu_d \frac{g}{r} t \quad \text{e} \quad v_{CM}(t) = \frac{J}{m} - \mu_d g t$$

e' chiaro che al tempo $t = 0$ $v_{CM} > \omega r$ quindi la sfera proseguira' in un moto di rotolamento e strisciamento finche' e' valida questa disuguaglianza', ma la velocita' angolare aumenta nel tempo mentre la velocita' del centro di massa diminuisce nel tempo e ad un certo istante t' si arrivera' all'uguaglianza delle velocita'

quindi $v_{CM} t' = \omega r$ ossia $\frac{J}{m} - \mu_d g t' = \frac{5}{2} \mu_d \frac{g}{r} t' r$

da cui $t' = \frac{2}{7} \frac{J}{\mu_d m g}$

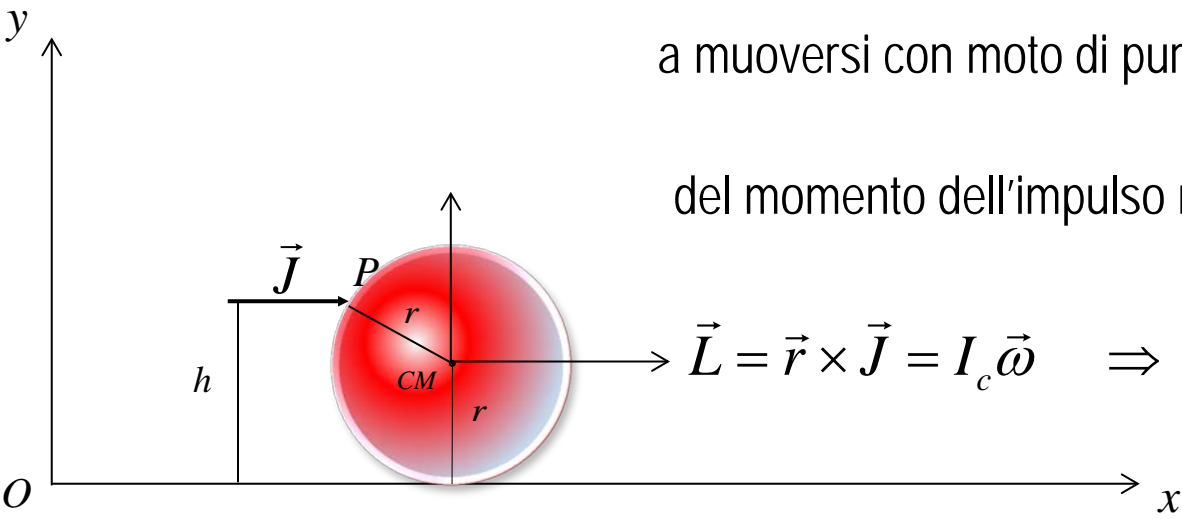
da quel momento in poi il moto della sfera tenderà a diventare un moto di puro rotolamento uniforme (in assenza di attrito volvente)

applichiamo l'impulso ad una altezza h rispetto al piano diversa dal raggio r della sfera

per determinare qual'è il valore di h per cui la sfera inizierà

a muoversi con moto di puro rotolamento si usa il teorema

del momento dell'impulso rispetto al centro di massa



$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{J} = I_c \vec{\omega} \quad \Rightarrow \quad (h - r)J = \frac{2}{5}mr^2\omega$$

quindi $\omega = \frac{5(h - r)J}{2mr^2}$

la condizione $v_{cm}(0) = \frac{J}{m}$ continua ad essere valida ed utilizzando questa relazione

$$\frac{J}{m} = v_{cm}(0) = \omega r \quad \text{si ottiene} \quad h = \frac{7}{5}r$$

Backup Slides