Velocita' areolare

dato un punto materiale in moto lungo una determinata traiettoria e' detta

" velocità areolare" $\vec{\mathrm{v}}_A$ la grandezza vettoriale che per definizione ha

- modulo pari alla derivata rispetto al tempo dell'area spazzata dal vettore posizione $\vec{r}$,

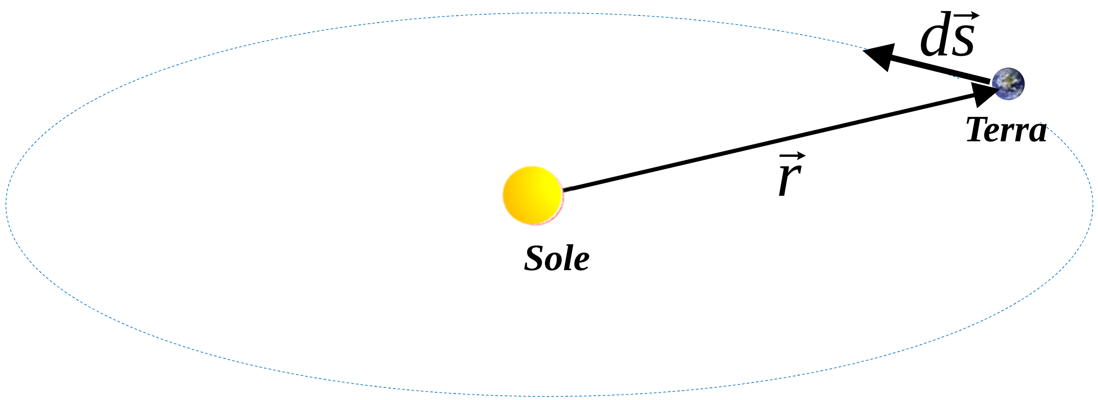
- direzione perpendicolare al piano istantaneo dell'orbita

- verso dato dalla regola della mano destra

del tutto in generale risulta che : $\vec{\mathrm{v}}_A = \dfrac{1}{2}\vec{r} \times \vec{\mathrm{v}}$

Velocita' areolare

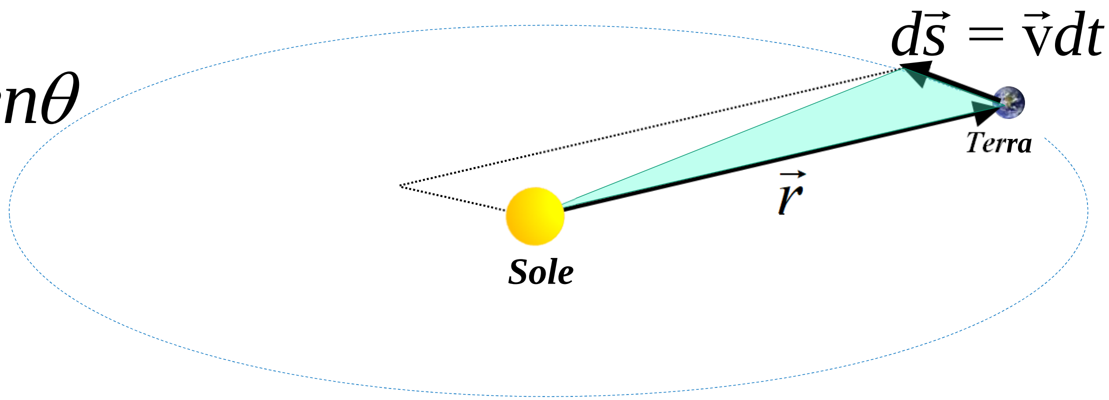
$$\vec{v}_A = \frac{1}{2}\vec{r} \times \vec{v}$$



$\left|\vec{A} \times \vec{B}\right| = AB\left|sen\vartheta\right| =$ area del parallelogrammo di lati A e B

consideriamo per semplicita' orbite circolari $\Rightarrow$ $\left|\vec{r}\right| = r = cost$

$$Area = \frac{1}{2}\left|\vec{r} \times d\vec{s}\right| = \frac{1}{2} rds\ sen\theta$$



in questo caso $sen\theta = 1$

$$\frac{d(Area)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}rds\right) = \frac{1}{2}r\frac{ds}{dt} = \frac{1}{2}r\mathrm{v}$$

in un orbita circolare in modulo $\mathrm{v} = \omega r$

quindi

$$\frac{d(Area)}{dt} = \frac{1}{2} r\mathrm{v} = \frac{1}{2} r^2 \omega$$

Leggi di Keplero

1) i pianeti percorrono orbite ellittiche intorno al sole che occupa uno dei fuochi dell'ellisse

2) la velocita' *areolare* e' costante

3) il quadrato del periodo di rivoluzione di un pianeta e' proporzionale al cubo del semiasse maggiore dell'orbita :

$$T^2 = k\, r^3$$

sempre considerando per semplicita' orbite circolari

il modulo del momento angolare di un pianeta di massa m_p , rispetto al sole, e'

$L = I\omega = m_p r^2 \omega$ in termini di momento angolare $\dfrac{dA}{dt} = \dfrac{1}{2}\dfrac{L}{m_p}$

velocita' areolare costante implica che il momento angolare sia costante

e, da $\vec{M} = d\vec{L}/dt$ cio' significa che il momento della forza rispetto al sole

sara' <u>nullo</u> lungo tutta l'orbita e cio' puo' essere vero solo se la forza

gravitazionale e' sempre diretta verso il centro della traiettoria

→ la forza di gravita' e' una <u>*forza centrale*</u>

Orbite circolari

il modulo dell'accelerazione centripeta e' : $v^2/r = \omega^2 r$

$$\Rightarrow \quad F = m\omega^2 r = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r = m\frac{4\pi^2}{T^2} r$$

applicando la terza legge di Keplero $T^2 = k\, r^3$ si ha

$$F = m\frac{4\pi^2}{k}\frac{r}{r^3} = \frac{4\pi^2}{k}\frac{m}{r^2}$$

in conclusione (in linguaggio "moderno")

- la seconda legge di Keplero afferma che la forza gravitazionale deve essere una <u>forza centrale</u>
- la terza afferma che la forza deve dipendere dall' <u>inverso del quadrato della distanza</u>

Backup Slides