

In un cilindro chiuso munito di un pistone di massa trascurabile, a tenuta perfetta, e scorrevole senza attrito sono contenute  $n$  moli di ossigeno, assimilabile a un gas perfetto biatomico.

Inizialmente il pistone è bloccato in una posizione tale per cui la pressione del gas sia  $p_i = 5 \text{ atm}$  e la sua temperatura  $T_i = 26.85 \text{ }^\circ\text{C}$ .

A partire da un dato istante il gas viene lasciato espandere liberamente compiendo un lavoro  $L$  sull'ambiente, che si suppone rimanga fisso alla pressione  $p_a = 1 \text{ atm}$ .

Sapendo che cilindro e pistone sono perfettamente adiabatici determinare :

in funzione di  $n$ ,  $T_i$ ,  $p_a$ ,  $p_i$  e di  $\gamma$

a) il valore della temperatura  $T_f$  del gas alla fine dell'espansione

b) l'espressione della variazione di energia interna del gas tra lo stato iniziale e quello finale

c) l'espressione del lavoro  $L$  compiuto dal gas.

la trasformazione effettuata dal sistema , ossia dal gas, e' una  
trasformazione **adiabatica** **irreversibile**

per assunzione in una qualsiasi trasformazione gli stati iniziale e finale della  
trasformazione sono stati di equilibrio e in questi stati potremo sfruttare

il fatto che sia utilizzabile l'equazione di stato dei gas perfetti

ma la trasformazione **non e' reversibile** quindi **non si potra'** usare

l'equazione di stato **durante** la trasformazione o in altri termini

non potremo utilizzare le equazioni di Poisson

nel caso piu' generale possibile di trasformazione di un gas perfetto che avvenga tra due stati di equilibrio  $i$  ed  $f$  si ha

$$\Delta U = nc_V \Delta T = nc_V (T_f - T_i)$$

se la trasformazione e' *adiabatica* non vi e' scambio di calore quindi  $Q = 0$

e per il primo principio  $\Delta U = -L \Rightarrow L = -nc_V (T_f - T_i)$

se la trasformazione adiabatica e' *irreversibile* questo e' tutto cio' che e' possibile affermare

in questo esercizio il gas e' lasciato libero di espandersi e cio' significa che la sua espansione terminera' solamente quando la pressione del gas uguagliera' la pressione dell'ambiente quindi  $p_f = p_A$

come specificato in precedenza se  $p_a$  e' la pressione esterna ad un generico istante di tempo il lavoro effettuato dal sistema sull'ambiente esterno

risultera' essere  $L = \int_{V_A}^{V_B} p_a dV$  integrale che puo' essere valutato soltanto

se si conosce il valore della *pressione esterna*  $p_a$  durante tutta la trasformazione

ma cio' avviene solo in casi particolari ossia:

- quando la pressione esterna non varia durante la trasformazione  $\rightarrow p_a = \text{cost}$
- nella espansione libera del gas nel vuoto  $\rightarrow$  pressione esterna nulla  $\rightarrow p_a = 0$
- durante una trasformazione "*quasi statica*"  $\rightarrow p_a = p$  ad ogni istante di tempo dove  $p$  e' la pressione del gas

in questo esercizio ci troviamo nel primo caso dunque

il lavoro compiuto dal gas sull'ambiente puo' essere calcolato come

$$L = \int_{V_A}^{V_B} p_a dV = p_a (V_f - V_i) \quad \text{dove} \quad (V_f - V_i) = \Delta V_{gas}$$

attenzione : non conosciamo i volumi iniziali e finali ne' del gas

ne' dell'ambiente, ma dato che importa conoscere solo la variazione di volume

dell'ambiente e dato che il cilindro e' chiuso possiamo affermare che

se il gas si espande aumentando il suo volume di una certa quantita'

corrispondentemente l'ambiente si comprimerà diminuendo il suo volume

della stessa quantita'

Nota bene: usualmente si fanno trasformazioni con cilindri aperti e in quel caso non sarebbe possibile dire nulla sulla variazione di volume dell'ambiente

Nota bene: il sistema esegue una trasformazione adiabatica mentre l'ambiente esegue una trasformazione contemporaneamente adiabatica ed isobara



dato che  $L = -nc_V(T_f - T_i)$  e dato che  $L = p_a(V_f - V_i)$

uguagliando i due termini si ha

$$-nc_V(T_f - T_i) = p_a(V_f - V_i) \Rightarrow nc_V(T_f - T_i) = p_a(V_i - V_f)$$

ossia  $nc_V(T_f - T_i) = p_a V_i - p_a V_f$

sfruttando l'equazione di stato dei gas perfetti

nello stato iniziale si ha  $p_i V_i = nRT_i \Rightarrow V_i = \frac{nRT_i}{p_i}$

quindi  $p_a V_i = p_a \frac{nRT_i}{p_i}$

mentre nello stato finale si ha  $p_a V_f = p_a \frac{nRT_f}{p_a} = nRT_f$

quindi  $nc_V T_f - nc_V T_i = p_a \frac{nRT_i}{p_i} - nRT_f$  ossia

$$nc_V T_f + nRT_f = nc_V T_i + p_a \frac{nRT_i}{p_i}$$

$$\Rightarrow n(c_V + R)T_f = n(c_V + R \frac{p_a}{p_i})T_i$$

utilizzando la relazione di Mayer  $c_p - c_V = R \quad \Rightarrow \quad c_p = c_V + R$

si ottiene  $nc_p T_f = n(c_V + R \frac{p_a}{p_i})T_i$

eliminando  $n$  si ha  $c_p T_f = (c_V + R \frac{p_a}{p_i})T_i$

$\Rightarrow T_f = (\frac{c_V}{c_p} + \frac{R}{c_p} \frac{p_a}{p_i})T_i$

inoltre da  $c_p = c_V + R$  ricaviamo  $1 = \frac{c_V}{c_p} + \frac{R}{c_p}$  ma  $\gamma = \frac{c_p}{c_V}$

quindi  $\frac{R}{c_p} = 1 - \frac{c_V}{c_p} = 1 - \frac{1}{\gamma} \Rightarrow \frac{R}{c_p} = \frac{\gamma - 1}{\gamma}$  in conclusione

$$T_f = \left( \frac{c_V}{c_p} + \frac{R}{c_p} \frac{p_A}{p_i} \right) T_i = \left( \frac{1}{\gamma} + \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{p_A}{p_i} \right) T_i$$

$$\Rightarrow T_f = \frac{1}{\gamma} \left( 1 + (\gamma - 1) \frac{p_A}{p_i} \right) T_i$$

la variazione  $\Delta U$  di energia interna del gas tra lo stato iniziale e quello finale sarà'

$$\begin{aligned}\Delta U &= nc_V(T_f - T_i) = nc_V \left( \frac{1}{\gamma} \left( 1 + (\gamma - 1) \frac{p_A}{p_i} \right) T_i - T_i \right) \\ &= nc_V T_i \left( \frac{1}{\gamma} \left( 1 + (\gamma - 1) \frac{p_A}{p_i} \right) - 1 \right) = nc_V T_i \left( \frac{1}{\gamma} + \left( \frac{\gamma - 1}{\gamma} \right) \frac{p_A}{p_i} - 1 \right) \\ &= nc_V T_i \left( \frac{1 - \gamma}{\gamma} + \left( \frac{\gamma - 1}{\gamma} \right) \frac{p_A}{p_i} \right) \quad \text{quindi} \quad \Delta U = nc_V T_i \frac{\gamma - 1}{\gamma} \left( \frac{p_A}{p_i} - 1 \right)\end{aligned}$$

e l'espressione del lavoro  $L$  compiuto dal gas sarà ovviamente esprimibile

come  $L = -\Delta U$  ossia 
$$L = -\Delta U = nc_v T_i \frac{1-\gamma}{\gamma} \left( \frac{p_A}{p_i} - 1 \right)$$

# ***Backup Slides***