

Ciclo di Carnot

e' un ciclo termico costituito da quattro trasformazioni
reversibili di un gas perfetto :

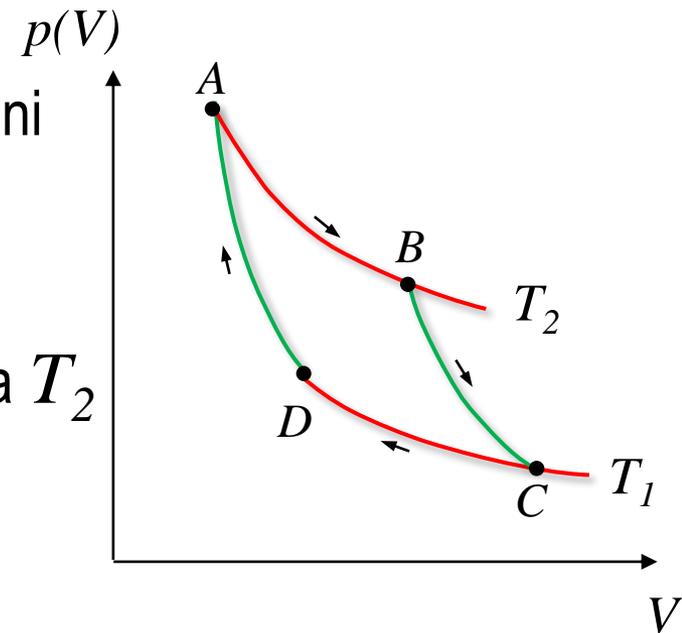
una espansione *isoterma* da A a B a temperatura T_2

una espansione *adiabatica* da B a C

una compressione *isoterma* da C a D a temperatura T_1

una compressione *adiabatica* da D ad A

si assume che $T_2 > T_1$



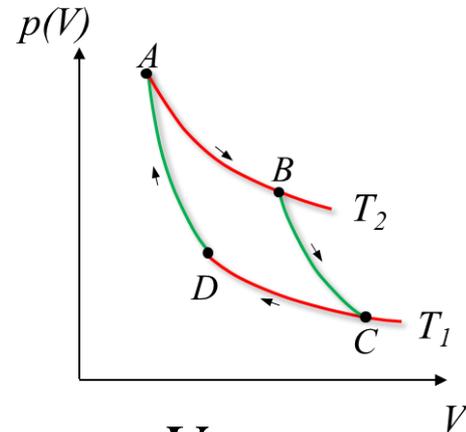
➤ perché trasformazioni isoterme e adiabatiche ?

le trasformazioni tra serbatoi di calore teoricamente devono avvenire a temperatura costante → due trasformazioni *isoterme* a diversa temperatura e se si deve operare con *due sole* sorgenti di calore per chiudere il ciclo l'unica possibilità è di effettuare due trasformazioni senza scambio di calore → due trasformazioni *adiabatiche*

rendimento del ciclo di Carnot

$$\left. \begin{aligned} pV = nRT &\Rightarrow p(V) = \frac{nRT}{V} \\ dQ = dU + dL &\Rightarrow \left\{ \begin{aligned} dQ_{is} = dL_{is} = (p(V)dV)_{is} \\ dL_{ad} = -dU = (-nc_V dT)_{ad} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} dQ_{is} &= \left(nRT \frac{dV}{V} \right)_{is} \\ dL_{ad} &= (-nc_V dT)_{ad} \end{aligned} \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned} Q_{is} &= nRT \int_{V_i}^{V_f} \frac{dV}{V} \Rightarrow Q_{is} = nRT \ln \frac{V_f}{V_i} \\ L_{ad} &= \int_{T_i}^{T_f} (-nc_V dT)_{ad} \Rightarrow L_{ad} = nc_V (T_i - T_f) \end{aligned}$$



poiche'

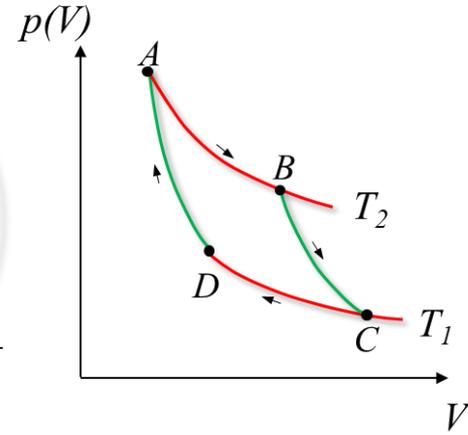
$$\begin{aligned} T_A = T_B = T_2 \\ T_C = T_D = T_1 \end{aligned} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} Q_{AB} = nRT_2 \ln \frac{V_B}{V_A} > 0 & \quad Q_{CD} = nRT_1 \ln \frac{V_D}{V_C} < 0 \\ L_{BC} = nc_V (T_2 - T_1) > 0 & \quad L_{DA} = nc_V (T_1 - T_2) < 0 \end{aligned} \right.$$

$$\eta = \frac{L_{tot}}{Q_a} = \frac{L_f + L_s}{Q_a} = \frac{Q_a + Q_c}{Q_a} = 1 + \frac{Q_c}{Q_a} \Rightarrow \eta = 1 + \frac{Q_{CD}}{Q_{AB}} \Rightarrow \eta = 1 + \frac{T_1 \ln \frac{V_D}{V_C}}{T_2 \ln \frac{V_B}{V_A}}$$

adiabatica reversibile \rightarrow Poisson

$$\begin{aligned} \text{da } B \text{ a } C \quad T_2 V_B^{\gamma-1} &= T_1 V_C^{\gamma-1} \\ \text{da } D \text{ ad } A \quad T_2 V_A^{\gamma-1} &= T_1 V_D^{\gamma-1} \end{aligned} \Rightarrow \frac{T_2 V_B^{\gamma-1}}{T_2 V_A^{\gamma-1}} = \frac{T_1 V_C^{\gamma-1}}{T_1 V_D^{\gamma-1}} \Rightarrow \frac{V_B}{V_A} = \frac{V_C}{V_D}$$

$$\eta = 1 + \frac{T_1 \ln \frac{V_D}{V_C}}{T_2 \ln \frac{V_B}{V_A}} \Rightarrow \eta = 1 - \frac{T_1 \ln \frac{V_C}{V_D}}{T_2 \ln \frac{V_B}{V_A}}$$



ma $\frac{V_B}{V_A} = \frac{V_C}{V_D} \Rightarrow \eta = 1 - \frac{T_1}{T_2}$

Attenzione :

in questa relazione non compaiono grandezze caratteristiche del gas ma solo

i valori delle temperature delle sorgenti con cui il gas sta scambiando calore

dunque il rendimento del ciclo di Carnot di un gas ideale

con calore specifico costante dipende solo dalle temperature assolute

a cui avvengono gli scambi isotermi di calore

tutte le macchine **reversibili** a gas perfetto che operano tra le stesse sorgenti di temperatura T_1 e T_2 (con $T_2 > T_1$) hanno lo stesso rendimento che in ogni caso e' sempre inferiore all'unita'

per avere rendimento unitario bisognerebbe o che $T_2 \rightarrow \infty$ o che $T_1 \rightarrow 0$, ma sono entrambe condizioni impossibili da realizzare

Nota Bene : il teorema di Carnot e' valido anche quando si opera con piu' di due sorgenti di calore \rightarrow il rendimento della macchina reversibile e' sempre superiore a quello della macchina irreversibile ma la formula per determinare il rendimento non sara' piu' $\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2}$ (eccezioni a parte, vedi ciclo di Stirling \rightarrow adiabatiche + isocore)

dal ciclo di Carnot : $Q_{AB} = nRT_2 \ln \frac{V_B}{V_A} > 0$ e $Q_{CD} = nRT_1 \ln \frac{V_D}{V_C} < 0$

quindi $-Q_{CD} = -nRT_1 \ln \frac{V_D}{V_C} = nRT_1 \ln \frac{V_C}{V_D} > 0$

per cui $\frac{Q_{AB}}{-Q_{CD}} = \frac{nRT_2 \ln \frac{V_B}{V_A}}{nRT_1 \ln \frac{V_C}{V_D}}$ ma $\frac{V_B}{V_A} = \frac{V_C}{V_D}$ perciò

$$\frac{Q_{AB}}{-Q_{CD}} = \frac{nRT_2 \ln \frac{V_B}{V_A}}{nRT_1 \ln \frac{V_B}{V_A}} = \frac{T_2}{T_1} \Rightarrow \frac{Q_{AB}}{T_2} = \frac{-Q_{CD}}{T_1} \Rightarrow \frac{Q_{AB}}{T_2} + \frac{Q_{CD}}{T_1} = 0$$

Q_{AB} era il calore assorbito dalla sorgente a temperatura maggiore T_2

Q_{CD} era il calore ceduto alla sorgente a temperatura inferiore T_1

detti $Q_{AB} = Q_a$ $Q_{CD} = Q_c$ $T_2 = T_a$ e $T_1 = T_c$

si ha che per ogni macchina di Carnot (cicli reversibili) vale la

$$\frac{Q_a}{T_a} + \frac{Q_c}{T_c} = 0$$

rendimento di una generica
macchina termica ciclica

$$\eta = 1 + \frac{Q_c}{Q_a}$$

rendimento di una macchina
di Carnot reversibile

$$\eta_c = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

teorema di Carnot

$$\eta \leq \eta_c$$

(dove $Q_c < 0$)

$$1 + \frac{Q_c}{Q_a} \leq 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

$$\frac{Q_c}{Q_a} \leq -\frac{T_1}{T_2}$$

$$\frac{Q_c}{Q_a} + \frac{T_1}{T_2} \leq 0$$

$$\frac{Q_a}{T_2} + \frac{Q_c}{T_1} \leq 0$$

per definizione $Q_a > 0$ e le
temperature devono essere espresse
in gradi Kelvin $\rightarrow T_1 > 0$ e $T_2 > 0$
perciò è possibile moltiplicare per Q_a
e dividere per T_1 la disuguaglianza
senza doverne modificare il verso

$$\frac{Q_a}{T_2} + \frac{Q_c}{T_1} \leq 0 \quad T_1 \equiv T_c \text{ e } T_2 \equiv T_a \quad \text{generalizzando} \rightarrow \frac{Q_a}{T_a} + \frac{Q_c}{T_c} \leq 0$$

dove il segno di uguaglianza vale solo se la macchina ciclica e' reversibile

conseguenza pratica: la possibilità di definire

una scala delle temperature basata solo sugli **scambi di calore**

e dunque del tutto **indipendente** dalle proprietà fisiche della particolare

sostanza termometrica usata

in effetti e' impossibile utilizzare il termometro a gas a volume costante al di

sotto di temperature dell'ordine di $1\text{ }^{\circ}\text{K}$ a causa della liquefazione dei gas

consideriamo una trasformazione termodinamica

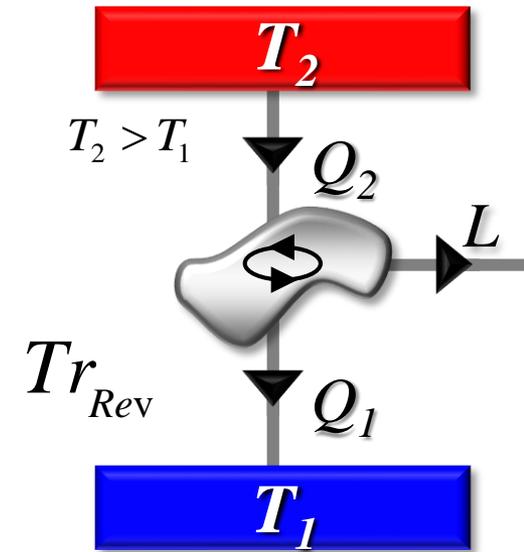
ciclica reversibile varranno le relazioni

$$\eta = 1 - \frac{|Q_1|}{Q_2} = 1 - \frac{T_1}{T_2} \Rightarrow T_1 = T_2 \frac{|Q_1|}{Q_2}$$

→ si potrà calcolare la temperatura del serbatoio T_1

conoscendo quella del serbatoio T_2 e misurando i calori acquisiti

e ceduti dal sistema



Temperatura termodinamica assoluta

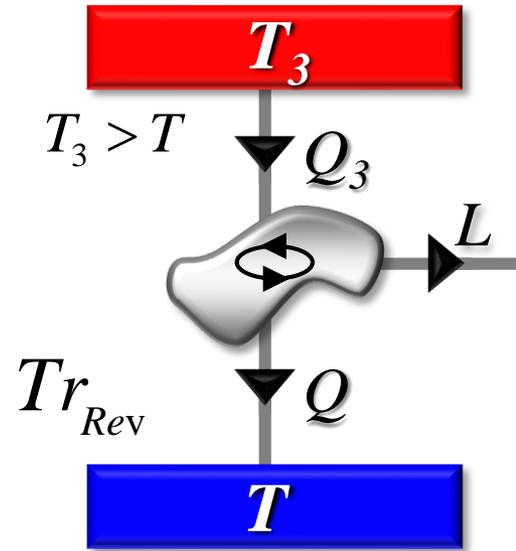
e' possibile costruire una scala termometrica

eseguendo una trasformazione ciclica reversibile tra

un serbatoio di calore alla temperatura T_3

del punto triplo dell'acqua ed il sistema di cui vogliamo misurare la temperatura

pensato come un serbatoio di calore alla temperatura T incognita



$$\eta = 1 - \frac{|Q|}{Q_3} = 1 - \frac{T}{T_3} \Rightarrow T = T_3 \frac{|Q|}{Q_3}$$

ponendo $T_3 = 273.16 \text{ °K}$ e misurando il calore Q_3 acquisito

ed il calore $|Q|$ ceduto al sistema di cui si vuole misurare la temperatura

$$T = T_3 \frac{|Q|}{Q_3}$$

si definisce **zero assoluto** quella temperatura alla quale una trasformazione isoterma reversibile non scambia calore

Cicli frigoriferi

per caratterizzare un ciclo frigorifero si utilizza il *coefficiente di prestazione* ω_F

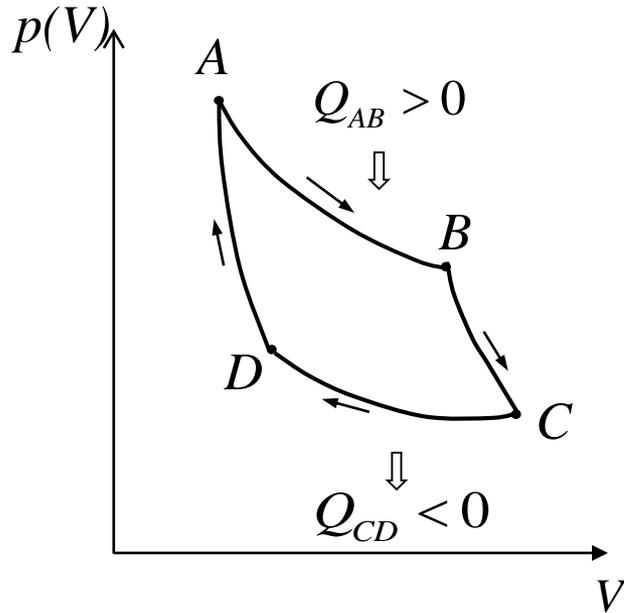
definito come il rapporto fra la quantità di calore Q_a sottratta al serbatoio freddo

e il lavoro necessario per ottenere questa sottrazione di calore

$$\omega_F = \frac{Q_a}{|L|}$$

un ciclo di Carnot operato in senso inverso costituisce un ciclo **frigorifero** reversibile

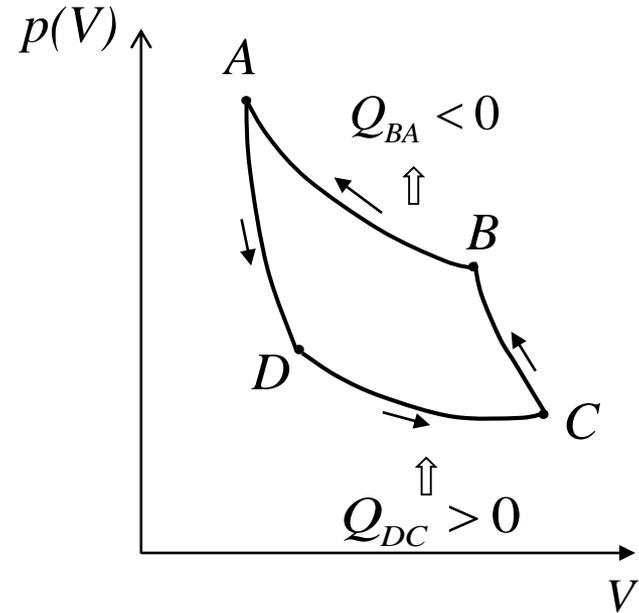
ciclo di Carnot termico



$$Q_{AB} = nRT_2 \ln \frac{V_B}{V_A} > 0$$

$$Q_{CD} = nRT_1 \ln \frac{V_D}{V_C} < 0$$

ciclo di Carnot frigorifero



$$Q_{BA} = nRT_2 \ln \frac{V_A}{V_B} < 0$$

$$Q_{DC} = nRT_1 \ln \frac{V_C}{V_D} > 0$$

il coefficiente di prestazione $\omega_F = \frac{Q_a}{|L|} = \frac{Q_{DC}}{|Q_{BA} + Q_{DC}|}$

$$= \frac{nRT_1 \ln \frac{V_C}{V_D}}{\left| nRT_2 \ln \frac{V_A}{V_B} + nRT_1 \ln \frac{V_C}{V_D} \right|} = \frac{T_1 \ln \frac{V_C}{V_D}}{T_2 \ln \frac{V_B}{V_A} - T_1 \ln \frac{V_C}{V_D}}$$

ma $\frac{V_B}{V_A} = \frac{V_C}{V_D} \Rightarrow \omega_F = \frac{T_1}{T_2 - T_1}$

Backup Slides