

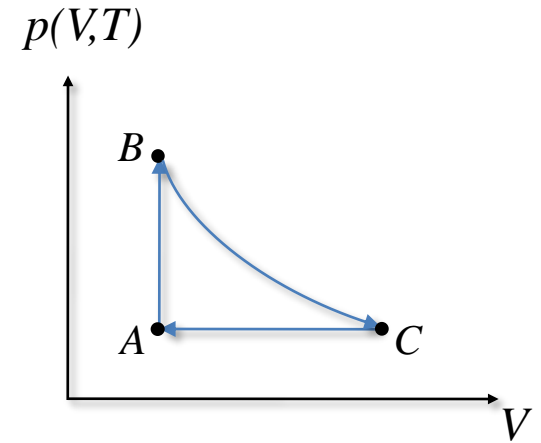
Esercizio

un gas perfetto biatomico compie il *ciclo reversibile ABCA* costituito da :

un riscaldamento *isocoro* da *A* a *B* ,

una espansione *adiabatica* da *B* a *C*

una compressione *isobara* da *C* ad *A* .



se $p_A = 2 \cdot 10^5 \text{ pa}$ $V_A = 10 \text{ l}$ $T_A = 350 \text{ K}$ e $T_B = 700 \text{ K}$ determinare

– il lavoro L compiuto dal gas durante il ciclo

– il rendimento η del ciclo

– il valore della temperatura T_C

– verificare numericamente che la variazione di entropia calcolata lungo la

trasformazione $B \rightarrow A \rightarrow C$ sia uguale a quella che si ha

lungo la trasformazione $B \rightarrow C$

in A
 $p_A V_A = nRT_A$
 $n = \frac{p_A V_A}{RT_A}$
 $n = 0.687$

in B
 $p_B V_B = nRT_B$
 $p_B = \frac{nRT_B}{V_A}$
 e dato che $V_B = V_A$
 $p_B = \frac{p_A V_A}{RT_A} \frac{RT_B}{V_A}$
 $p_B = p_A \frac{T_B}{T_A}$
 $p_B = 4 \cdot 10^5 \text{ Pa}$

in C
 $p_C V_C = nRT_C$
 si puo' determinare per es. la temperatura T_C
 $T_C = \frac{p_C V_C}{nR}$
 $p_C = p_A$
 $T_C = \frac{p_A V_C}{nR}$
 $n = \frac{p_A V_A}{RT_A}$
 $T_C = \frac{p_A V_C}{R} \frac{RT_A}{p_A V_A}$
 $T_C = \frac{V_C}{V_A} T_A$ ma $V_C = ?$

da B a C **adiabatica reversibile** $pV^\gamma = \text{cost}$ per **tutta** la trasformazione

→ in B e C $p_B V_B^\gamma = p_C V_C^\gamma$
 $V_B = V_A$
 $p_B V_A^\gamma = p_C V_C^\gamma$
 $p_C = p_A$
 $p_B V_A^\gamma = p_A V_C^\gamma$
 $p_B = p_A \frac{T_B}{T_A}$
 $p_A \frac{T_B}{T_A} V_A^\gamma = p_A V_C^\gamma$
 $T_B V_A^\gamma = T_A V_C^\gamma$
 $V_C^\gamma = V_A^\gamma \frac{T_B}{T_A}$ - $V_C = V_A \left(\frac{T_B}{T_A} \right)^{\frac{1}{\gamma}}$
 $\gamma = 1.4 \rightarrow V_C = V_A \left(\frac{T_B}{T_A} \right)^{\frac{1}{\gamma}} = 10^{-2} (2)^{\frac{1}{1.4}} = 1.64 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3$

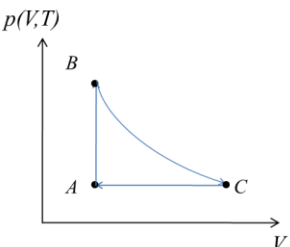
Calcolo del lavoro svolto durante il ciclo

da A a B isocora $V_B = V_A$ $L_{A \rightarrow B} = \int_{V_A}^{V_A} p dV$ $L_{A \rightarrow B} = 0$	da B a C adiabatica → politropica con $\tau = \gamma$ $L = \frac{nR}{1-\tau} \Delta T$	da C ad A isobara $p_A = p_C$ $L_{C \rightarrow A} = p_A \int_{V_C}^{V_A} dV$ $L_{C \rightarrow A} = p_A (V_A - V_C)$
	$L_{B \rightarrow C} = \frac{nR}{1-\gamma} (T_C - T_B) = \frac{1}{1-\gamma} (nRT_C - nRT_B)$ ↓ $pV = nRT$	
	$L_{B \rightarrow C} = \frac{1}{1-\gamma} (p_C V_C - p_B V_B)$ ↓ $\gamma = \frac{7}{5} = \frac{1}{1-\gamma} = -\frac{5}{2}$	
	$L_{B \rightarrow C} = -\frac{5}{2} (p_C V_C - p_B V_B)$	

$L_{tot} = L_{A \rightarrow B} + L_{B \rightarrow C} + L_{C \rightarrow A}$

$= 0 - \frac{5}{2} (p_C V_C - p_B V_B) + p_A (V_A - V_C)$

$= -\frac{5}{2} (p_A V_C - p_B V_A) + p_A (V_A - V_C)$



numericamente $L_{tot} = 1800 - 1280 = L_{tot} = 520 \text{ J}$

il rendimento di un ciclo termico e' $\eta = \frac{L_f + L_s}{Q_a} = \frac{L_{tot}}{Q_a}$

il sistema in esame acquisisce calore soltanto nel tratto AB del ciclo quindi per calcolare η bastera' determinare la quantita' di calore Q_{AB}

c'e' qualche altra relazione indipendente da poter usare ?

Risp. : **SI** il primo principio della termodinamica applicato da A a B

$$\Delta U_{AB} = Q_{AB} - L_{AB}$$

$$\Delta U_{AB} = Q_{AB}$$

$$Q_{AB} = nc_V(T_B - T_A)$$

$$= \frac{5}{2}nR(T_B - T_A)$$

$$= \frac{5}{2}(p_B V_B - p_A V_A)$$

$$Q_{AB} = \frac{5}{2}V_A(p_B - p_A) = 5000 \text{ J}$$

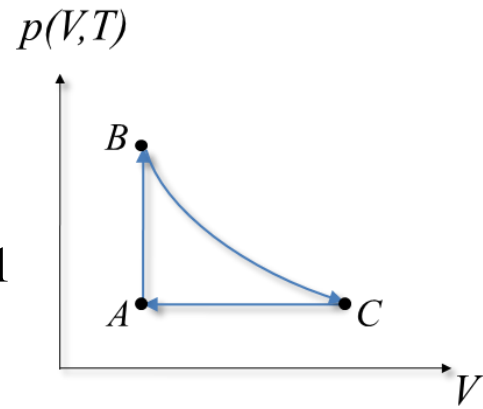
$$\eta = 10.4\%$$

$$\eta = \frac{L_{tot}}{Q_a}$$

terza domanda: determinare il valore della temperatura T_C

possiamo utilizzare la relazione di Poisson

$$T_C V_C^{\gamma-1} = T_B V_B^{\gamma-1} \quad \text{da cui} \quad T_C = T_B \left(\frac{V_B}{V_C} \right)^{\gamma-1}$$



$$\text{dunque} \quad T_C = T_B \left(\frac{V_A}{V_C} \right)^{\gamma-1} \Rightarrow T_C = 574.3 \text{ K}$$

oppure e indifferentemente l'equazione di stato dei gas perfetti nel punto C

dato che n e V_C sono già stati determinati in precedenza e che $p_c = p_A$

per quanto riguarda la quarta domanda :

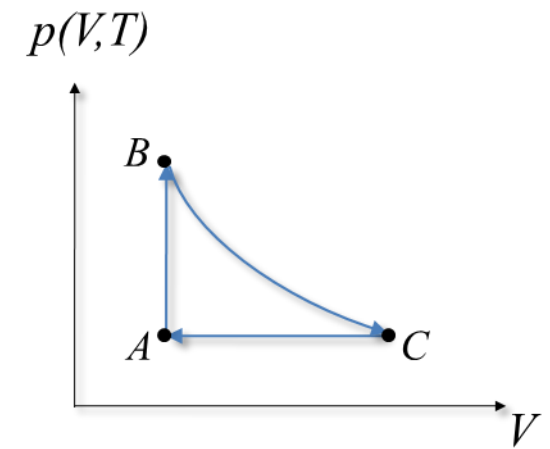
al termine dell'insieme di tutte le trasformazioni

la variazione di entropia del gas deve essere nulla

in quanto il gas sta effettuando una trasformazione ciclica

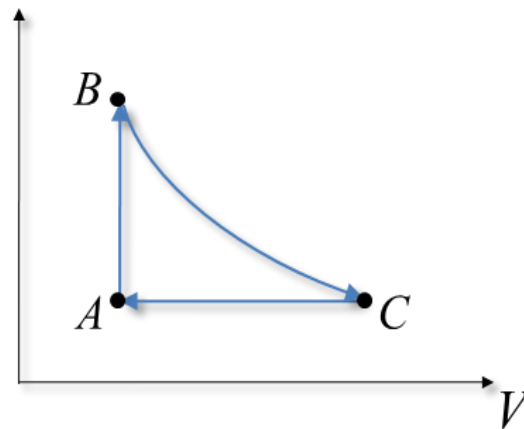
la trasformazione da B a C e' adiabatica

reversibile quindi $\Delta S_{BC} = 0$



mentre per la trasformazione da B ad A a C si ha

$p(V,T)$



$$\Delta S_{BA} + \Delta S_{AC} = \int_B^A \frac{\dot{d}Q}{T} \quad + \quad \int_A^C \frac{\dot{d}Q}{T}$$

isocora isobara

isocora

isobara



$$\dot{d}Q = \Delta U = nc_V dT$$

$$\dot{d}Q = nc_p dT$$



$$\int_B^A nc_V \frac{dT}{T}$$

$$\int_A^C nc_p \frac{dT}{T}$$

dunque

$$\Delta S_{BA} + \Delta S_{AC} = nc_V \ln \frac{T_A}{T_B} + nc_p \ln \frac{T_C}{T_A}$$

$$\Delta S_{BA} + \Delta S_{AC} = nc_V \ln \frac{T_A}{T_B} + nc_p \ln \frac{T_C}{T_A}$$

per un gas biatomico $c_V = \frac{5}{2}R$
 ma $c_p = R + c_V \Rightarrow c_p = \frac{7}{2}R$

$$\Delta S_{BA} + \Delta S_{AC} = n \frac{5}{2} R \ln \frac{T_A}{T_B} + n \frac{7}{2} R \ln \frac{T_C}{T_A}$$

↓

$$= nR \left(\frac{5}{2} \ln \frac{T_A}{T_B} + \frac{7}{2} \ln \frac{T_C}{T_A} \right)$$

↓

$$= nR \left(\frac{5}{2} \ln \frac{350}{700} + \frac{7}{2} \ln \frac{574}{350} \right)$$

↓

$$\Delta S_{BA} + \Delta S_{AC} = nR(-1.733 + 1.733) = 0$$

Backup Slides