Velocita' ed accelerazione in coordinate cartesiane

supponiamo che nel punto P dello spazio di coordinate $\left(x, y, z\right)$

siano note le componenti cartesiane $\left(\mathrm{v}_x, \mathrm{v}_y, \mathrm{v}_z\right)$ della velocita'

e quelle $\left(a_x, a_y, a_z\right)$ dell'accelerazione

e supponiamo di essere nel caso piu' generale possibile

in cui la velocita' e l' accelerazione non sono orientate

nella direzione degli assi cartesiani

- per determinare le componenti tangenziale e centripeta dell'accelerazione

  si possono sfruttare le proprieta' del prodotto scalare e vettoriale di vettori la posizione del generico punto P e' $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

la velocita' e' $\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k}$

la direzione della velocita' e' individuata dal versore $\hat{t}$ $\hat{t} = \frac{d\vec{r}}{|d\vec{r}|} \equiv \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$

l'accelerazione e' $\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}$

e avra' una componente tangenziale $\vec{a}_t$ nella direzione di $\hat{t}$

ed una componente centripeta $\vec{a}_t$ nella direzione di $\hat{u}_c$

- il **<u>prodotto scalare</u>** tra $\vec{a}$ e $\hat{t}$ fornira' la proiezione di $\vec{a}$ nella direzione di $\hat{t}$

ossia la componente tangenziale $a_t = \left|\vec{a}_t\right|$ dell'accelerazione

dato che la velocita' e' sempre tangente alla traiettoria

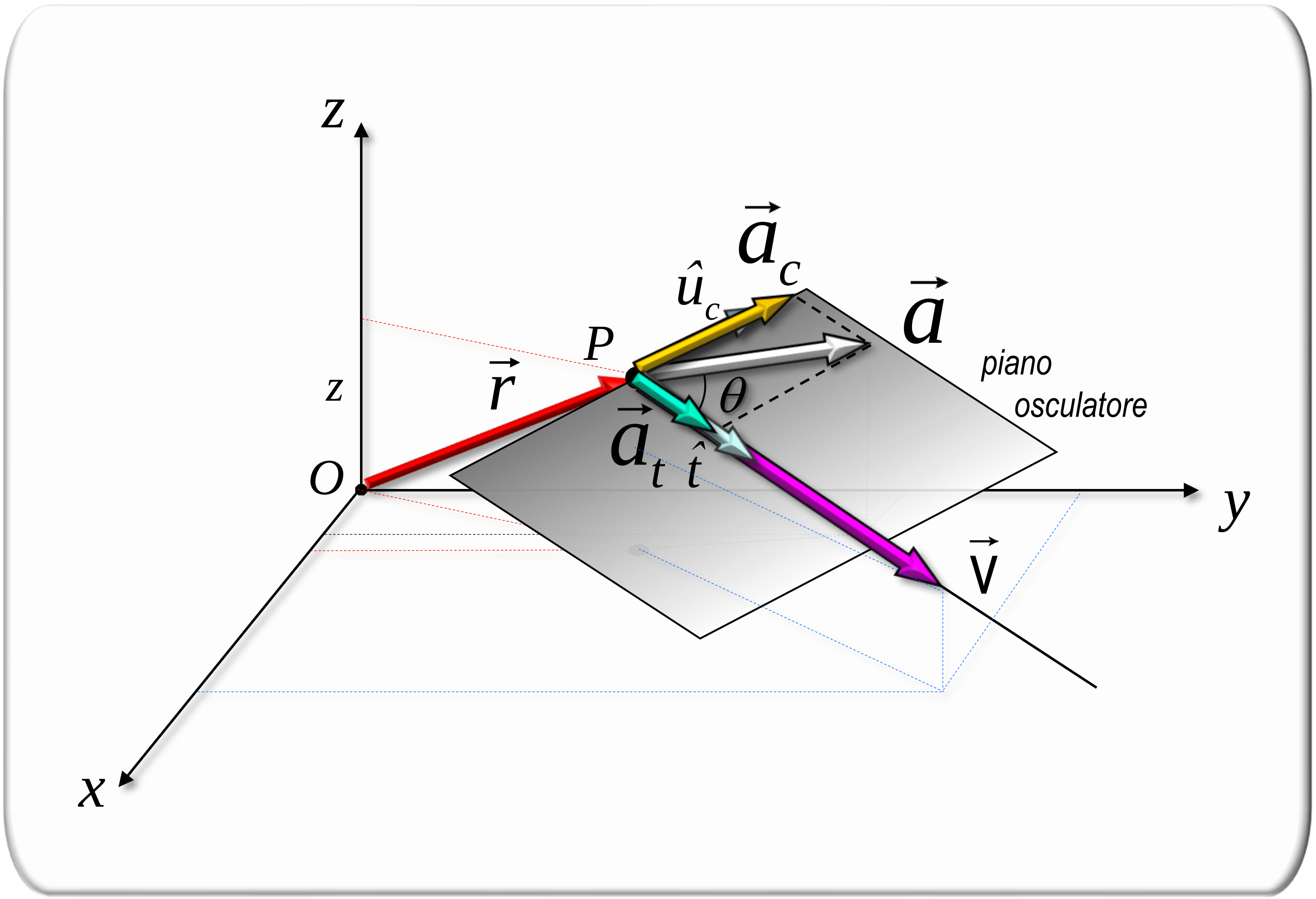
quindi $$a_t = \vec{a} \cdot \hat{t}$$

- il **modulo** del prodotto vettoriale tra $\vec{a}$ e $\hat{t}$

$$\left|\vec{a}\times\hat{t}\right| = \left|\vec{a}\right|\left|\hat{t}\right| sen\vartheta = asen\vartheta$$ fornira' la proiezione di $\vec{a}$

nella direzione di $\hat{u}_c$ ossia la componente centripeta $a_c = \left|\vec{a}_c\right|$

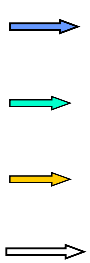
dell'accelerazione



Nota bene:

il versore $\hat{t}$ tangente alla curva nel punto P e il versore $\hat{u}_c$ generano un piano, denominato piano *osculatore* della curva nel punto P

e' il piano su cui giace il cerchio osculatore



$$\hat{t} = \frac{d\vec{r}}{|d\vec{r}|} \equiv \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

$$|\vec{a}_t| = \vec{a} \cdot \hat{t}$$

$$|\vec{a}_c| = |\vec{a} \times \hat{t}|$$

le componenti tangenziale e centripeta dell'accelerazione sono date da

$$a_t = \vec{a} \cdot \hat{t} \qquad\qquad a_c = \left|\vec{a} \times \hat{t}\right|$$

$$\hat{t} = \frac{d\vec{r}}{\left|d\vec{r}\right|} \equiv \frac{\vec{\mathrm{v}}}{\left|\vec{\mathrm{v}}\right|}$$ dove $$\left|\vec{\mathrm{v}}\right| = \sqrt{\mathrm{v}_x^2 + \mathrm{v}_y^2 + \mathrm{v}_z^2}$$

$$\Rightarrow \qquad \hat{t} = \frac{\mathrm{v}_x \hat{i} + \mathrm{v}_y \hat{j} + \mathrm{v}_z \hat{k}}{\sqrt{\mathrm{v}_x^2 + \mathrm{v}_y^2 + \mathrm{v}_z^2}}$$

$$a_t = \left(\vec{a}\cdot\hat{t}\right) = \left(a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}\right)\cdot\left(\frac{v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k}}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}}\right)$$

$$= \left(\frac{a_x v_x + a_y v_y + a_z v_z}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}}\right)$$

ma se $a_t = \left(\vec{a}\cdot\hat{t}\right)$ $\Rightarrow$ $\vec{a}_t = (\vec{a}\cdot\hat{t})\hat{t}$

$$= \left(\frac{a_x \mathrm{v}_x + a_y \mathrm{v}_y + a_z \mathrm{v}_z}{\sqrt{\mathrm{v}_x^2 + \mathrm{v}_y^2 + \mathrm{v}_z^2}} \right) \frac{\mathrm{v}_x \hat{i} + \mathrm{v}_y \hat{j} + \mathrm{v}_z \hat{k}}{\sqrt{\mathrm{v}_x^2 + \mathrm{v}_y^2 + \mathrm{v}_z^2}}$$

in conclusione:

$$\vec{a}_t = \left(\frac{a_x \mathrm{v}_x + a_y \mathrm{v}_y + a_z \mathrm{v}_z}{\mathrm{v}_x^2 + \mathrm{v}_y^2 + \mathrm{v}_z^2} \right) \left(\mathrm{v}_x \hat{i} + \mathrm{v}_y \hat{j} + \mathrm{v}_z \hat{k} \right)$$

$$a_c = \left|\vec{a} \times \hat{t}\right| =$$

$$\frac{1}{\sqrt{\mathrm{v}_x^2 + \mathrm{v}_y^2 + \mathrm{v}_z^2}} \sqrt{(a_y \mathrm{v}_z - a_z \mathrm{v}_y)^2 + (a_z \mathrm{v}_x - a_x \mathrm{v}_z)^2 + (a_x \mathrm{v}_y - a_y \mathrm{v}_x)^2}$$

noto a_c si potra' determinare il raggio di curvatura ρ della traiettoria

mentre la direzione ed il verso di $\hat{u}_c$ si potranno determinare

dalla $\vec{a}_c = \vec{a} - \vec{a}_t \quad \Rightarrow \quad \hat{u}_c = \dfrac{\vec{a} - \vec{a}_t}{\left|\vec{a} \times \hat{t}\right|}$

Backup Slides