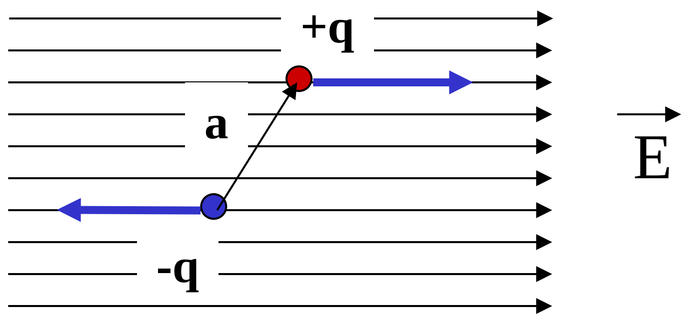
Dipolo elettrico posto in un campo elettrico esterno uniforme



un dipolo elettrico posto in un campo elettrico esterno **uniforme** tendera' ad **orientarsi** nella direzione del campo esterno

il momento torcente puo' essere espresso come:

$$\vec{M} = \vec{P} \times \vec{E}$$

se il campo elettrico **non** fosse uniforme:

$$\vec{F}_{-}(\vec{E}) = -q\vec{E}$$

$$\vec{F}_{+}(\vec{E} + \Delta\vec{E}) \simeq q(\vec{E} + \frac{\partial\vec{E}}{\partial x}a_x + \frac{\partial\vec{E}}{\partial y}a_y + \frac{\partial\vec{E}}{\partial z}a_z)$$

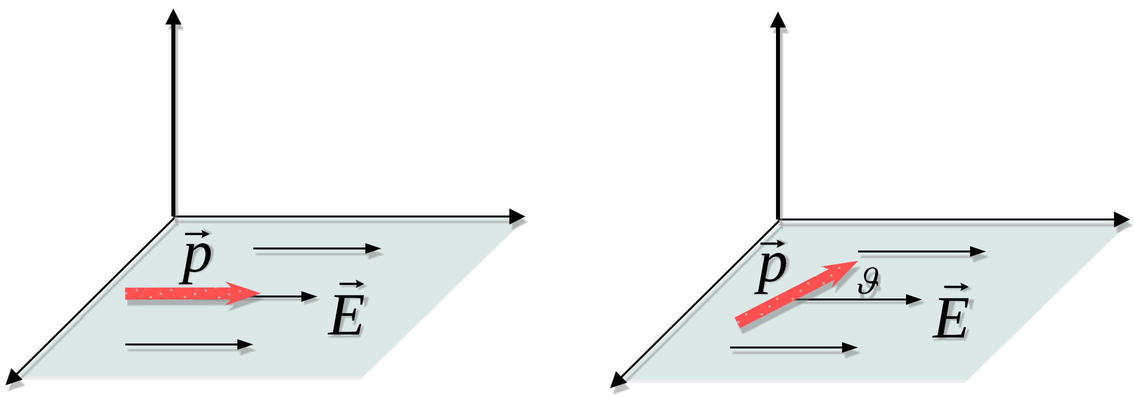
dove a_x a_y e a_z sono le proiezioni del vettore $\vec{a}$ lungo gli assi cartesiani

$$\Rightarrow \quad \vec{F} = \vec{F}_- + \vec{F}_+ = P_x \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} + P_y \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} + P_z \frac{\partial \vec{E}}{\partial z}$$

il dipolo elettrico sara' attratto nella direzione in cui il campo e' crescente

Un dipolo di momento $\vec{p}$ e' immerso in un campo elettrico $\vec{E}$ uniforme.

Descrivere il moto del dipolo quando viene ruotato di un piccolo angolo dalla posizione di equilibrio



per la seconda equazione cardinale della dinamica

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = I\vec{\alpha}$$

dove I e' il momento d'inerzia del dipolo elettrico rispetto ad un asse passante per il centro e perpendicolare a $\vec{p}$

$$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E} \quad \Rightarrow \quad \vec{p} \times \vec{E} = I\vec{\alpha}$$

dalla figura $\quad \vec{p} \times \vec{E} = (-pE sen\vartheta)\hat{k}$

quindi $$I\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -pE\,sen\,\vartheta$$

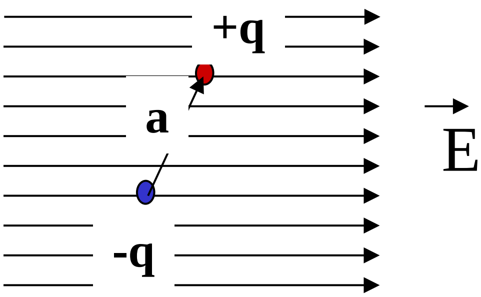
nell'ipotesi di piccoli angoli $$I\frac{d^2\vartheta}{dt^2} \simeq -pE\vartheta$$

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \frac{pE}{I}\vartheta = 0$$

che e' l'equazione di un moto armonico semplice con pulsazione

$$\omega = \sqrt{\frac{pE}{I}} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{pE}}$$

l'energia potenziale elettrica di un dipolo elettrico in presenza di un campo elettrico esterno e'



$$U = qV^{+} - qV^{-}$$

$$V^{-} = V(x, y, z)$$

$$V^{+} = V(x + a_x, y + a_y, z + a_z) \simeq$$

$$\simeq V(x, y, z) + \frac{\partial V}{\partial x} a_x + \frac{\partial V}{\partial y} a_y + \frac{\partial V}{\partial z} a_z$$

dove a_x a_y e a_z sono le proiezioni del vettore $\vec{a}$ lungo gli assi cartesiani

$$U \simeq q a_x \frac{\partial V}{\partial x} + q a_y \frac{\partial V}{\partial y} + q a_z \frac{\partial V}{\partial z}$$

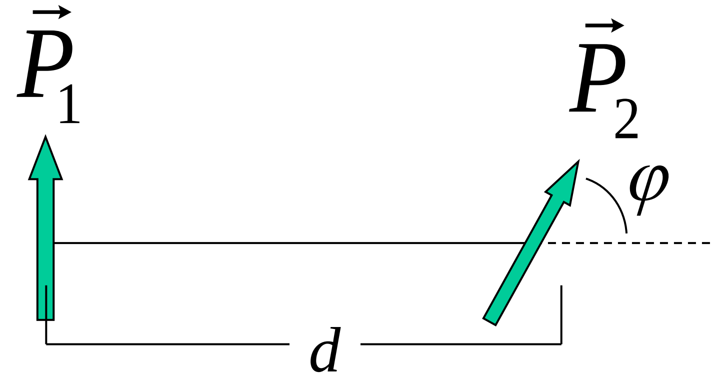
e dato che $$\vec{E} = -gradV$$

$$\Rightarrow \quad U_{dipolo} = -\vec{P} \cdot \vec{E}$$

se il dipolo e’ posto nel campo elettrico generato da un altro dipolo la configurazione cui compete il *minimo* di energia potenziale elettrica, e quindi la configurazione in cui si avra’ equilibrio **stabile**, e’ quella in cui i due dipoli si disporranno <u>antiparallelamente</u>

Due dipoli elettrici di momento $\vec{P}_1$ e $\vec{P}_2$ sono disposti a distanza fissa d tra loro e sono liberi di ruotare intorno al loro centro. La direzione di $\vec{P}_2$ forma un angolo φ con la congiungente i dipoli. Se le dimensioni dei dipoli sono piccole rispetto alla distanza calcolare

1) l'energia potenziale di $\vec{P}_2$ nel campo elettrico generato da $\vec{P}_1$

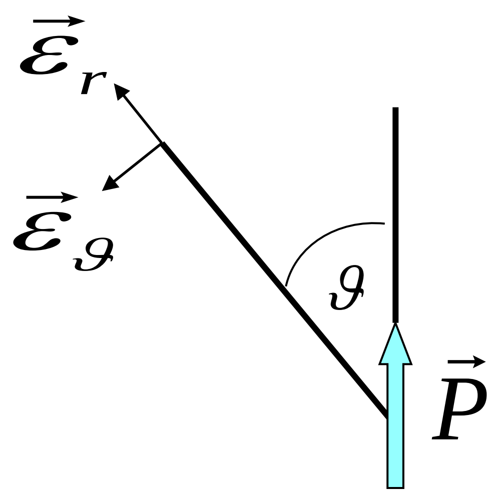


2) l'angolo per cui si ha equilibrio stabile

il campo ***lontano*** dal dipolo e' dato da:

$$\vec{\varepsilon}_\vartheta = \frac{P\sin\vartheta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\hat{u}_\vartheta$$

$$\vec{\varepsilon}_r = \frac{2P\cos\vartheta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\hat{u}_r$$



per $\theta = 90$ °

$$\vec{\varepsilon}_r = 0$$

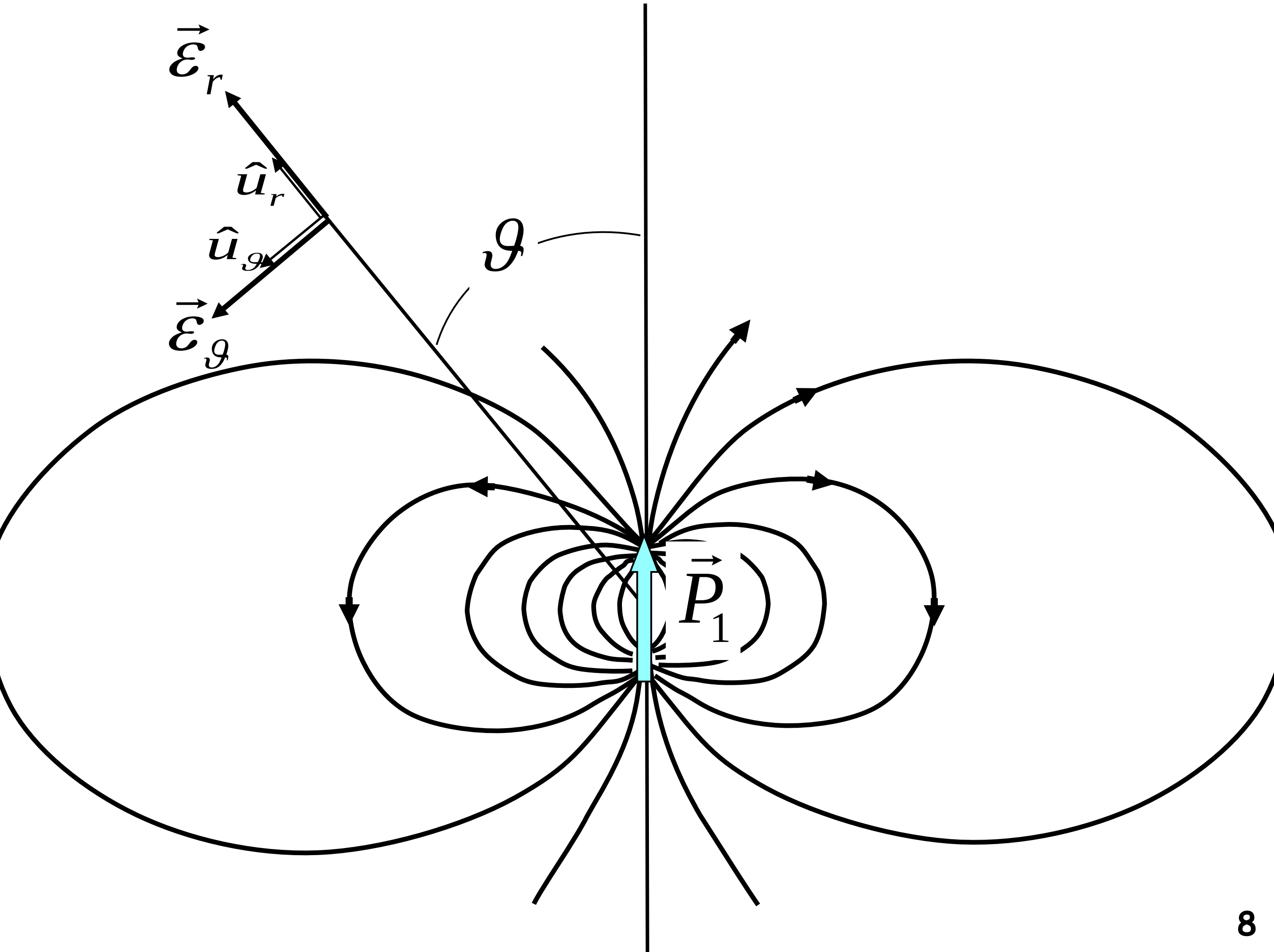
$$\vec{\varepsilon}_\vartheta = \frac{P}{4\pi\varepsilon_0 d^3}\hat{u}_\vartheta$$

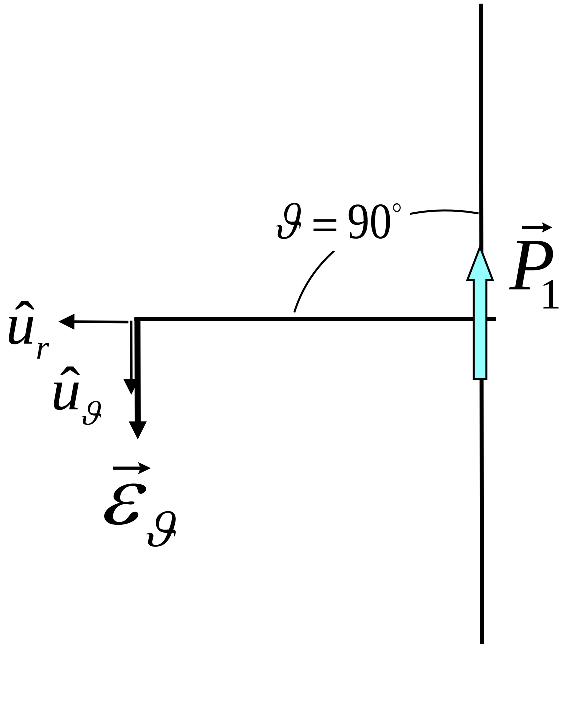
per 270°

$$\vec{\varepsilon}_r = 0$$

$$\vec{\varepsilon}_\vartheta = -\frac{P}{4\pi\varepsilon_0 d^3}\hat{u}_\vartheta$$

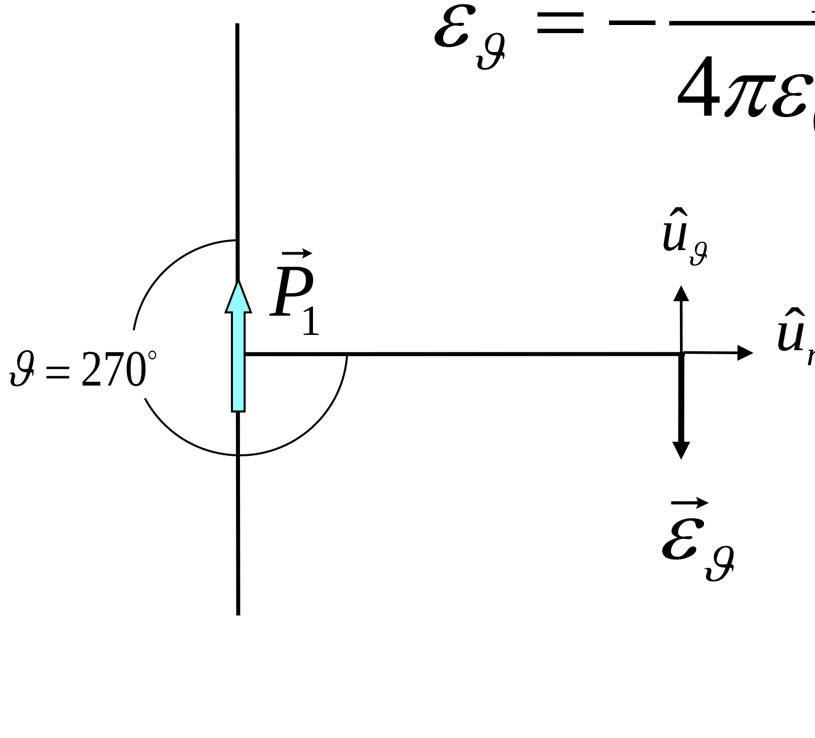
da notare come in entrambi i casi si abbia $\vec{\varepsilon}_\vartheta = -\dfrac{\vec{P}_1}{4\pi\varepsilon_0 d^3}$





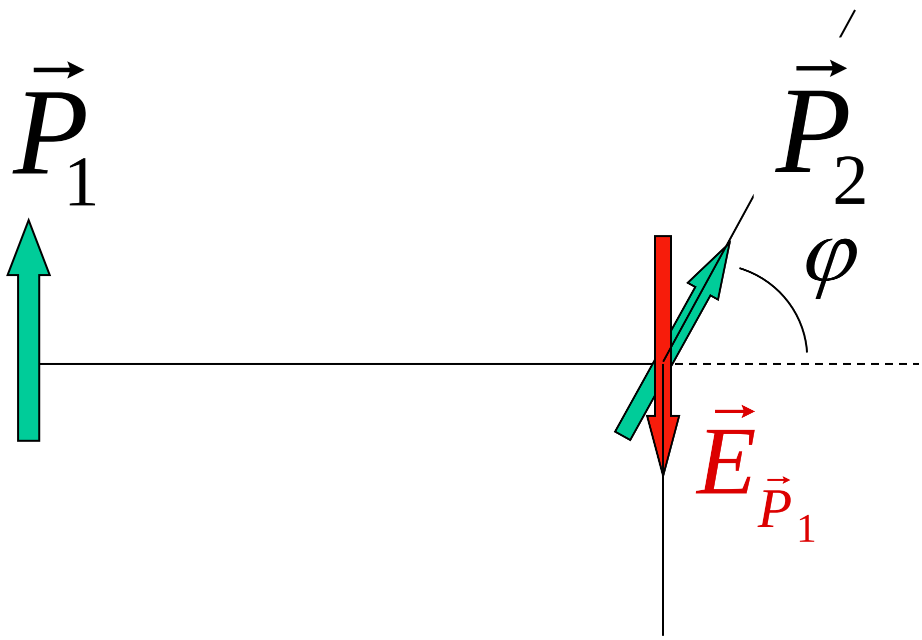
$$\vec{\varepsilon}_\vartheta = -\frac{\vec{P}_1}{4\pi\varepsilon_0 d^3}$$

$$\vec{\varepsilon}_\vartheta = -\frac{\vec{P}_1}{4\pi\varepsilon_0 d^3}$$



l'energia potenziale di un dipolo posto in un campo elettrico esterno e'

$$U = -\vec{P} \cdot \vec{E} \quad \text{in questo caso} \quad U = -\vec{P}_2 \cdot \vec{E}_1$$



l'angolo tra P_2 e il campo elettrico di P_1 e' di $\pi/2 + \varphi$ e $\cos(\pi/2 + \varphi) = -\,\mathrm{sen}\ \varphi$

per cui

$$U = \frac{P_1 P_2}{4\pi\varepsilon_0 d^3} \sin\varphi$$

dalla $U = \frac{P_1 P_2}{4\pi\varepsilon_0 d^3} \sin\varphi$

si deduce che la posizione di equilibrio stabile corrispondente al minimo della energia potenziale si ha per

$$\varphi = -\frac{\pi}{2}$$

ossia quando i dipoli sono *antiparalleli*

Backup Slides